Matemáticas 3

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Verónica Hoyos Aguilar
Mariana Luisa Sáiz Roldán

Grupo Editorial Patria

Tercero de Secundaria

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN

Dra. Mariana Sáiz Roldán
Universidad Pedagógica Nacional

Dra. Verónica Hoyos Aguilar
Universidad Pedagógica Nacional

Dirección editorial: Tomás García Cerezo
Gerencia editorial de contenidos: María Antonieta Salas Chávez
Coordinación general de contenidos: José de Jesús Arriaga Carpio
Coordinación de contenidos de Matemáticas: Alejandro González Luna
Edición: Mariana Barrientos Padilla
Asistencia editorial: María del Rosario Balderas Martínez, Ricardo Alvarado Andalón
Coordinación pedagógica: Rosa Elia Martínez Chavarría
Coordinación de edición técnica: Héctor Rafael Garduño Lamadrid
Diseño de interiores: Avant Graph Diseña y Comunica
Formación de interiores: Gabriela Roldán Torres
Coordinación gráfica: Mónica Godínez Silva
Asistencia gráfica: Marco Antonio Rosas Aguilar
Ilustraciones: Alexandro Portales Padilla y Barracuda
Diseño de portada: Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V., con la colaboración de Creativos SA
Fotografía: © Shutterstock.com

Matemáticas 3

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN: 978-607-438-699-8

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 2014
Primera edición revisada: 2017
Primera reimpresión: 2018

Presentación

Este libro tiene dos propósitos generales: *a)* guiar a los estudiantes para que desarrollen las competencias matemáticas de tercer grado de secundaria y *b)* proporcionar al profesor de matemáticas una herramienta de trabajo con la que pueda diseñar sus actividades docentes a fin de que los estudiantes sigan desarrollando dichas competencias. Ambos objetivos están ligados, ya que para orientar al estudiante se requiere la presencia y participación del profesor, quien organiza la interacción entre los alumnos, aclara dudas, guía y destraba las discusiones, propone actividades y problemas adicionales, y evalúa junto con los alumnos los resultados.

Nosotros, los autores del presente volumen, entendemos por *competencias matemáticas* la capacidad humana educada para:

1. Formular y resolver problemas
2. Escuchar y hablar acerca de ideas matemáticas
3. Leer y escribir ideas matemáticas
4. Representar situaciones con símbolos y figuras y manipularlas
5. Argumentar y probar enunciados matemáticos

En este tercer grado, el estudio del álgebra gira en torno a la función cuadrática, en particular, las ecuaciones y la variación cuadrática, que debe contrastarse con la variación lineal. En relación con el eje "Forma, espacio y medida", se introduce la congruencia y la semejanza cuyos problemas fomentan el desarrollo del razonamiento, además de ser herramientas para resolver problemas que surgen en diversas situaciones de la vida diaria. Aunado a estos temas se comienza a estudiar las relaciones trigonométricas que ofrecen técnicas de cálculo que amplían en gran medida las situaciones abordadas en la semejanza. En el eje "Manejo de la información", en lo que se refiere a la probabilidad, se introducen los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes; respecto a la estadística, el concepto central es el de dispersión.

En esta obra también se ha reforzado la discusión y la argumentación que debe darse entre los alumnos para hallar soluciones, propuestas y resultados matemáticos. Pedir a los estudiantes que "lleguen a acuerdos sobre los resultados" implica que tomen una actitud crítica y flexible, que reflexionen y propongan sus resultados y después los contrasten con los de otros compañeros. Al existir diferencias se tiene que revisar el texto y el procedimiento de ambas propuestas, de modo que un acuerdo así alcanzado tiene un valor importante, aun cuando no sea el resultado correcto. Y es que si sólo el libro o el profesor son los árbitros para decidir sobre la veracidad de una proposición, no se da a los alumnos la oportunidad de adquirir realmente las competencias de resolver problemas y de argumentar.

Este libro se ha elaborado con estas ideas como guías, no obstante, para lograr su objetivo es necesario el compromiso de los alumnos con su propio aprendizaje y la insustituible presencia del profesor. Con ello, confiamos en que los objetivos del texto se verán cumplidos.

Presentación al alumno

Estimado alumno:

El propósito del presente libro es ofrecerte una guía para que desarrolles tus competencias matemáticas. Estamos seguros de que tienes la capacidad de procesar las ideas, los símbolos y la información matemática incluidos en este libro. No obstante, es necesario que asumas frente a su contenido una actitud proactiva y crítica para adquirir dichas competencias.

El libro está organizado para que desarrolles tu capacidad de resolver problemas matemáticos, por eso se proponen varios en cada lección (de hecho, la lección comienza con uno). Tales problemas te ofrecen la oportunidad de reflexionar y hacer matemáticas incluso antes de conocer los conceptos y contenidos asociados a ellos. Muchas veces podrás resolverlos con tus propios recursos, otras veces no. En cualquier caso, el esfuerzo de reflexión te predispondrá a entender mejor el contenido de la lección.

El desarrollo de la capacidad para resolver problemas va acompañado de la elaboración de procedimientos y métodos cada vez más potentes; entre ellos, tiene especial importancia el lenguaje algebraico. En este grado podrás adquirir esta herramienta que te abrirá las puertas para aumentar el nivel de complejidad de los problemas y situaciones que puedes afrontar. En las demás áreas de la matemática (geometría, probabilidad y estadística) también se utiliza progresivamente este lenguaje.

En este tercer curso la mayoría de las actividades se realizan en pareja o en equipo y se plantean preguntas y temas para discutirlos en colectivo. Cada sugerencia se debe atender y discutir en equipo de manera que fortalezca el conocimiento adquirido y lo puedan aplicar a situaciones variadas. No basta con entender y recordar un concepto, es necesario saber utilizarlo tanto en la solución de una situación como en la discusión con los compañeros. A veces se cree llegar a entender un concepto difícil, pero al querer compartirlo con los demás se puede revelar que se estaba equivocado.

Pero la actividad misma de producir un resultado, de discutirlo, argumentarlo y llegar a un acuerdo es un aprendizaje que compensa los posibles errores que eventualmente se presenten. No hay por qué temer a los errores, pues incluso matemáticos con mucha experiencia los han cometido; lo que no debe ocurrir es no saber argumentar una idea acerca de una solución o un procedimiento matemático.

Deseamos que el presente libro sea una guía efectiva para que aprendas a plantear y resolver problemas, y a desarrollar el lenguaje algebraico para comunicar y argumentar procedimientos y enunciados matemáticos. ¡Suerte en tus estudios!

Presentación al profesor

Estimado profesor:

Ponemos a su disposición el libro de tercer grado que tiene como uno de sus propósitos proporcionar una herramienta de trabajo en el diseño de sus actividades docentes. En la propuesta de eseñanza de la matemática subyace una interpretación del enfoque pedagógico que en los últimos años ha sido desarrollado por la didáctica de la matemática.

Como se ha mencionado en la presentación, la preocupación que ha dirigido nuestra propuesta es la de coadyuvar a resolver el problema de cómo desarrollar las competencias matemáticas de los estudiantes. Y una de estas condiciones es la de contar con un material rico y flexible que le ofrezca a usted, estimado profesor, alternativas para desarrollar su proyecto de clase.

En tercer grado, naturalmente los temas son más complejos que en los grados anteriores y requieren tanto de habilidades de razonamiento como de manejo de técnicas algebraicas, geométricas, probabilísticas y de datos. Por otra parte, el desarrollo intelectual de los alumnos de este grado ha crecido enormemente en el último año, de manera que ahora son capaces de percibir y manejar sistemas de ideas y conceptos, es decir, de emplear en la solución de un problema varias ideas a la vez relacionadas de manera conveniente.

En este nivel los alumnos adquirirán herramientas importantes para resolver situaciones y problemas de la vida, así como bases firmes para que afronten sus estudios futuros, no sólo de matemáticas, sino también de otras disciplinas científicas. Es por eso que se insiste, a lo largo de todo el libro, en que los alumnos trabajen en equipo y luego confronten sus soluciones, procedimientos y argumentaciones con otros equipos. Estas actividades son de suma importancia para el enfoque pedagógico que intenta desarrollar esta obra. Si los estudiantes aprenden a discutir y confrontar sus ideas y a valorar la construcción de resultados colectivamente, con una reflexión personal previa, se estarán preparando para hacer matemáticas y para hacer de su profesión una actividad útil y comprometida con la sociedad.

Estimado profesor, esperamos que el propósito con el que hemos concebido y realizado el presente volumen se cumpla en la práctica efectiva; para lo cual sabemos que su participación es la pieza fundamental. Le deseamos éxito en la digna y loable empresa en la que está usted comprometido.

Los autores

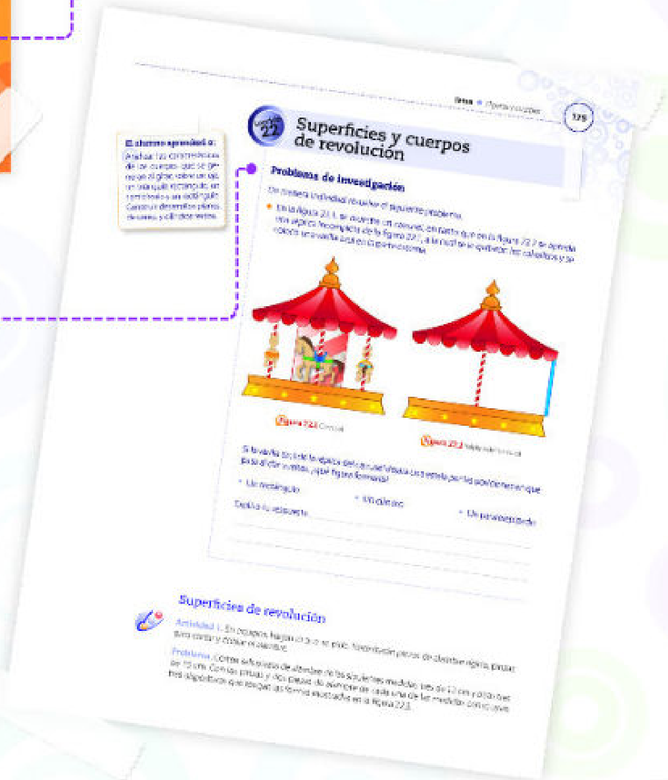
Índice

Estructura del libro

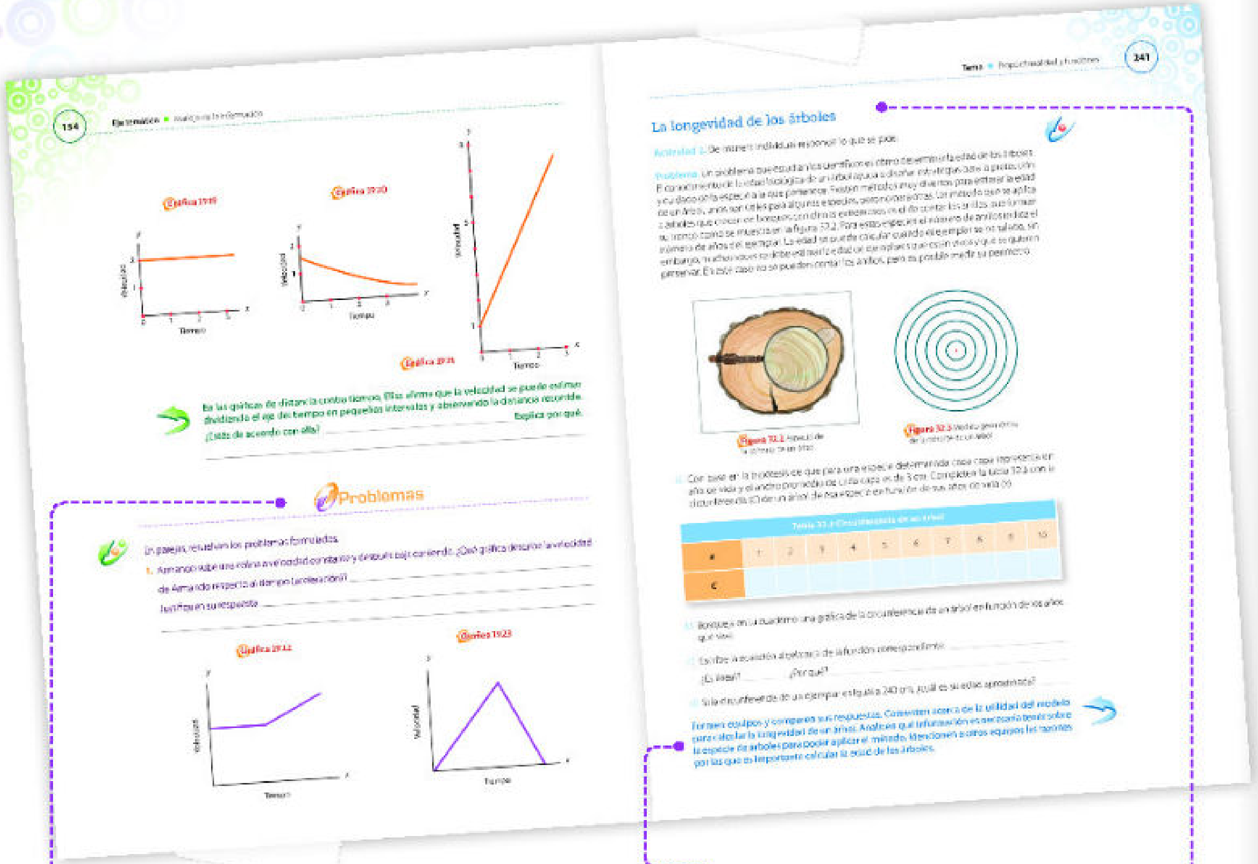
Con el fin de que conozcas cómo es el libro *Matemáticas 3*, a continuación se presenta un breve recorrido por cada una de las secciones que lo integran.

Portadilla del bloque
Podrás encontrar una breve introducción acerca de los contenidos del bloque, se titula **Un vistazo**.

Aprendizajes esperados
También encontrarás un cuadro informativo con los aprendizajes esperados que alcanzarás como resultado del estudio de las lecciones. Este cuadro incluye las competencias matemáticas que desarrollarás durante el bloque y el curso.



Problema de investigación
Cada lección inicia con un Problema de investigación cuyo propósito es que aproveches tus conocimientos previos en su solución y prepares el camino para aprender los contenidos nuevos.
El "Problema de investigación" introduce situaciones relacionadas con el contenido que se va a estudiar en la lección, con la vida cotidiana y con hechos familiares de la cultura.



Problemas

Los problemas se pueden resolver de manera individual, en parejas o con otros compañeros.

Trabajo individual: Te da la oportunidad de pensar y desarrollar tu ingenio e iniciativa, según las capacidades personales.

Trabajo en pareja: Su propósito es que escuches el planteamiento de otro compañero, que expongas el tuyo y los comparen y traten de llegar a un acuerdo.

Trabajo colectivo: Puede ser en equipo o en grupo. Amplía las posibilidades del trabajo con la participación de un mayor número de compañeros, ocasionalmente requiere de la ayuda del profesor.

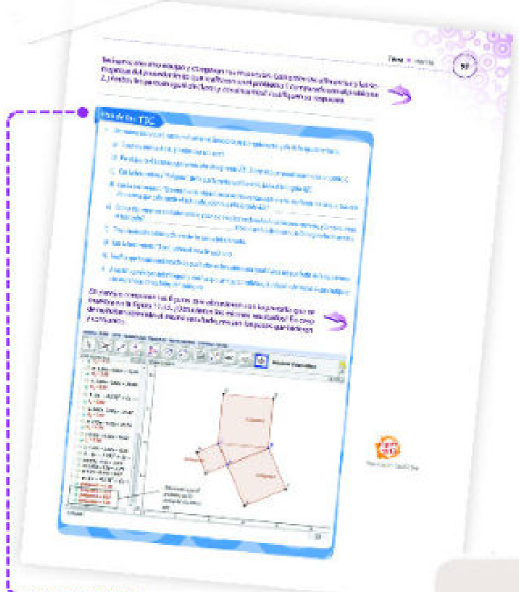
Socialización del conocimiento y retroalimentación

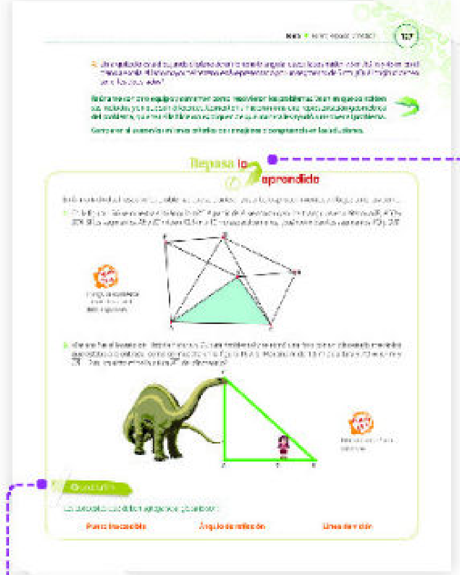
Al finalizar cada una de las actividades y las secciones de ejercitación, hallarás un cierre con el que se pretende: i) socializar el conocimiento, es decir: comparar los resultados obtenidos, analizarlos en parejas o en equipo, comentarlos con otros compañeros, etcétera y ii) retroalimentar el conocimiento construido, esto es: elaborar conjeturas, hacer predicciones y someterlas a prueba, plantear y resolver nuevos problemas, expresar, representar e interpretar información matemática para verificar su validez.

Situaciones y problemas

Después del "Problema de investigación", la lección desarrolla los contenidos.

Se introducen los conceptos, estrategias, procedimientos o reglas mediante diversos métodos: unas veces con una explicación, otras se te pide que completes las ideas, incluso que las formules tú a partir de ejemplos y problemas. También permanentemente se te pide que argumentes los resultados dados o encontrados por ti.





Uso de las TIC

Tiene el objetivo de que aprendas a utilizar los nuevos recursos para ampliar tus posibilidades de resolver problemas y tus conocimientos de los temas de la asignatura. Se utiliza la calculadora y el software GeoGebra, además de que se te sugieren direcciones de internet para mostrar otros ejemplos o ampliar tu conocimiento. Al final del texto se ha incluido una breve guía para dar los primeros pasos en la utilización de GeoGebra.

Glosario

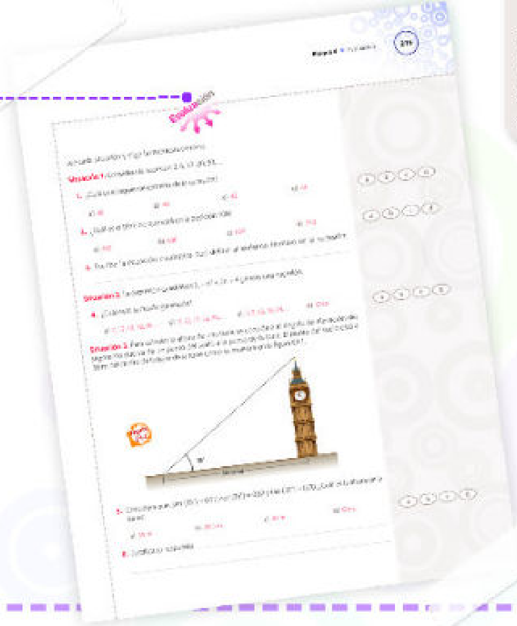
Es una actividad de retroalimentación para que construyas tus definiciones a partir del conocimiento y experiencias que adquieres en cada lección. Hacerlo te proporcionará recursos para una mejor argumentación en las discusiones escolares, además de ser una fuente de consulta a la que puedes recurrir.

Repasa lo aprendido

El propósito es que puedas recapitular lo aprendido, a veces mediante un problema, y en todas las lecciones repasando conceptos clave o glosario.

Evaluación

Se evalúan los aprendizajes esperados del bloque, con reactivos diseñados conforme a los lineamientos de las pruebas PISA. Te permite medir tus avances.



Dosificación temática

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

Bloque	Aprendizaje esperado	Eje	Tema	Contenido	Lección	Horas / Clase
Bloque 1	Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	**1. Ecuaciones cuadráticas sencillas**	
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	**2. Congruencia y semejanza**	
				Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	**3. Propiedades de figuras congruentes y semejantes**	
		Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	**4. Diferentes representaciones de una situación**	
				Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	**5. Variación cuadrática**	
			Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	**6. Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes**	
			Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	**7. Población y muestra**	

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente

Bloque	Aprendizaje esperado	Eje	Tema	Contenido	Lección	Horas / Clase
Bloque 2	Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan. Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	**8. Ecuaciones cuadráticas y factorización**	
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	**9. Rotación y traslación de figuras**	
				Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	**10. Diseños y transformaciones**	
			Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	**11. Triángulos y áreas**	
				Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	**12. Teorema de Pitágoras**	
		Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	**13. Regla de la suma**	

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente

Bloque	Aprendizaje esperado	Eje	Tema	Contenido	Lección	Horas / Clase
Bloque 3	Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado. Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	**14. Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas**	
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	**15. Congruencia y semejanza II**	
				Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	**16. Teorema de Tales**	
				Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	**17. Figuras homotéticas**	
		Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	**18. Funciones cuadráticas y modelos**	
				Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	**19. Gráficas compuestas que modelan diversos fenómenos**	
			Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	**20. Probabilidad de eventos independientes**	

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente

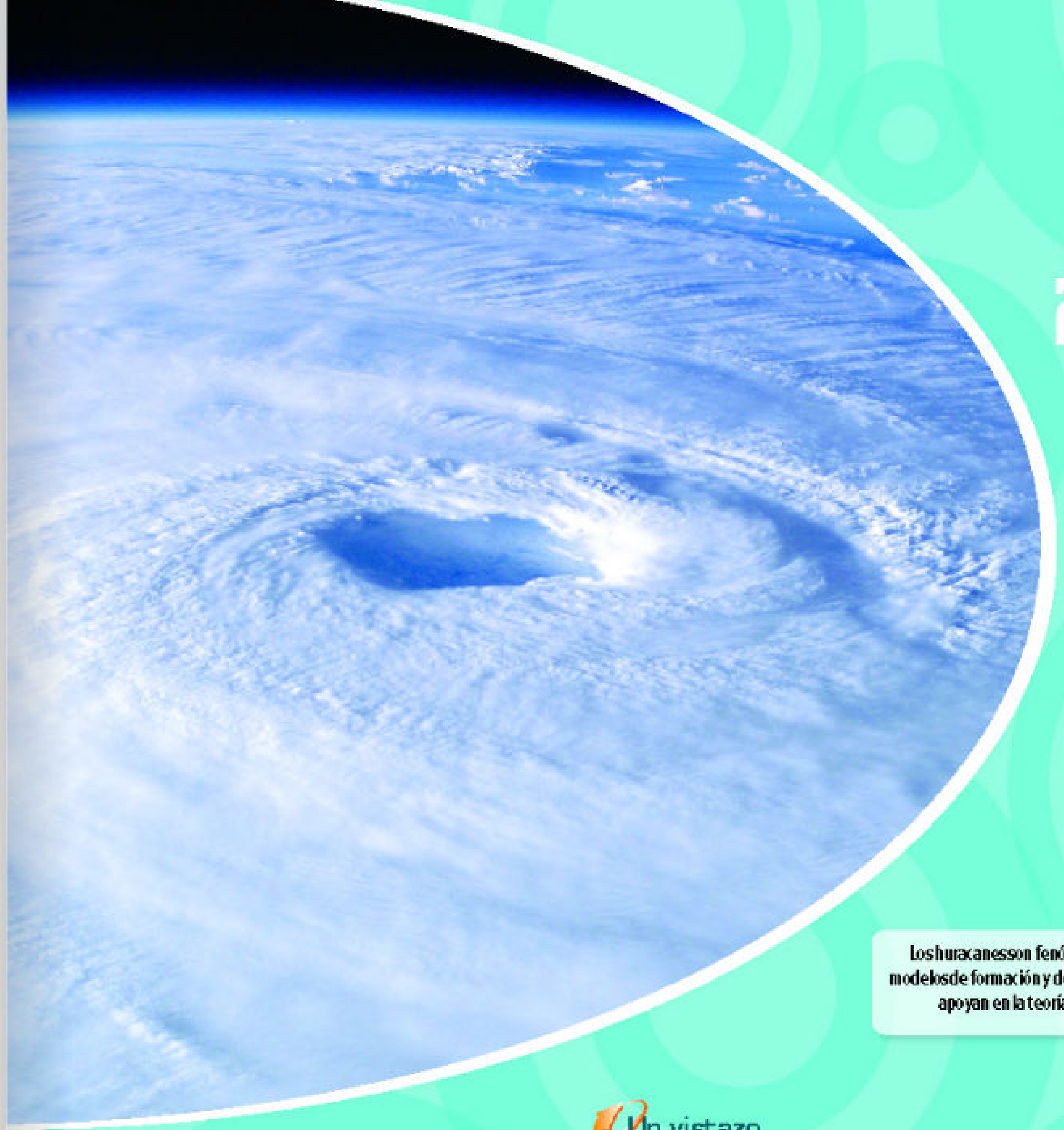
Bloque	Aprendizaje esperado	Eje	Tema	Contenido	Lección	Horas / Clase
Bloque 4	Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	**21. Sucesiones cuadráticas**	
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	**22. Superficies y cuerpos de revolución**	
			Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	**23. La pendiente de una recta y los catetos**	
				Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	**24. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo**	
				Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	**25. Razones trigonométricas**	
		Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	**26. Razón de cambio y pendiente de una recta**	
			Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	**27. Medias de dispersión**	

Bloque 5

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente

Aprendizaje esperado	Eje	Tema	Contenido	Lección	Horas / Clase
Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	**28. Ecuaciones y problemas**	
Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.			Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	**29. Secciones de cilindros y conos**	
	Forma, espacio y medida	Medida	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	**30. El volumen de cilindros y conos**	
Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.			Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	**31. Estimación de volúmenes de cilindros y conos**	
Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	**32. Variación lineal o cuadrática**	
		Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	**33. Juegos justos**	

Bloque 1



Los huracanes son fenómenos aleatorios. Los modelos de formación y desarrollo de huracanes se apoyan en la teoría de probabilidad.

Un vistazo

En este bloque estudiarás algunos aspectos de las funciones polinomiales de grado dos, en particular, los problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas sencillas. Revisarás situaciones en las que se presenta una variación cuadrática y se contrasta con la variación lineal. Se introducen los temas de congruencia y semejanza de triángulos, para que puedas resolver problemas y entender el funcionamiento de la geometría. También se comienza a estudiar el concepto de eventos independientes, que es fundamental y característico de la probabilidad. Finalmente, se introducen las nociones de muestra y población, dos conceptos de la estadística inferencial, porque se trata de conocer características de la población a partir del examen de muestras.

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizaje esperado
· Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El alumno aprenderá a:
Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Lección 1

Ecuaciones cuadráticas sencillas

Problema de investigación

En parejas, lean el problema que se plantea y respondan las preguntas.

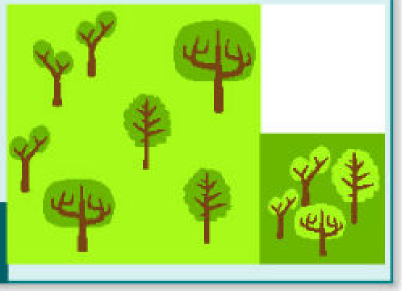
- El papá de Aldo quiere comprar un terreno para instalar un taller mecánico. En un periódico encuentra el siguiente anuncio clasificado:

INMUEBLES

Se venden dos terrenos de forma cuadrada que son adyacentes, como se muestra en la fotografía. El lado de un terreno mide el doble que el lado del otro y la suma de sus áreas es igual a 1 125 m². Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Interesados, comunicarse al teléfono

045 96 11 93 67 45



El papá de Aldo comenta:

—Es justo lo que necesitamos para poner el taller, ¡pero no vienen las dimensiones! Vamos a tener que hablar al teléfono del anuncio para que nos den las medidas de los terrenos.

Como el hijo ya ha estudiado álgebra, le explica:

—No es necesario, papá, yo puedo encontrar las dimensiones.

En una hoja de papel Aldo anota una ecuación, hace algunas operaciones y obtiene las medidas de los lados de cada terreno.

a) Escriban un procedimiento para encontrar cuánto mide el lado de cada terreno.

____

____

b) ¿Cuál es la ecuación que modela la situación planteada en el anuncio clasificado y sirve, además, para hallar la solución? ______________

c) Resuelvan la ecuación y obtengan la longitud de los lados de los cuadrados.

d) Comprueben que la solución satisfaga las condiciones del problema. ______

____

Reúnanse con otras parejas y comparen tanto el resultado como el procedimiento que siguieron. Evalúen cuál de los procedimientos realizados les pareció más eficaz. Expliquen por qué.

Problemas que involucran ecuaciones cuadráticas sencillas

Actividad 1. Formen equipos para leer los problemas y realicen lo que se pide.

Problema 1. Ariana tiene la mitad de la edad de su hermano y el producto de sus edades es 98. ¿Cuáles son las edades de Ariana y de su hermano?

a) ¿Cuál es la cantidad desconocida que deben encontrar? ______________

b) Propongan un procedimiento para encontrar la solución. Verifiquen que el número hallado cumpla las condiciones del problema. ______________

c) Describan en su cuaderno el procedimiento que siguieron.

d) Con base en la información del recuadro "Procedimientos aritméticos y algebraicos", determinen si el procedimiento que realizaron para encontrar las edades de Ariana y su hermano es aritmético o algebraico. Justifiquen su respuesta. ______________

____

Procedimientos aritméticos y algebraicos

Un procedimiento es **aritmético** si en su solución sólo se utilizan números y sus operaciones.

Un procedimiento es **algebraico** si en su solución se utilizan literales, además de números y sus operaciones.

Comparen sus soluciones con las de otros equipos. Identifiquen y contrasten los procedimientos aritméticos y los algebraicos. Analicen cuál puede resultar más eficaz y por qué.

Si las soluciones de todos los equipos son de un solo tipo (aritmético o algebraico), busquen una solución en la que se utilice un procedimiento diferente.

Problema 2. Un químico tiene que dividir una caja de Petri rectangular en cuatro rectángulos más pequeños para distribuir bases de agar-agar de distinto color. La división debe hacerse mediante dos segmentos perpendiculares entre sí: uno de los segmentos es paralelo a dos lados opuestos de la placa rectangular y el otro es paralelo a los otros dos lados. Un rectángulo es un cuadrado como se muestra en la figura 1.1. Los tres rectángulos restantes que forman la caja de Petri tienen las siguientes áreas: 42 cm², 24 cm² y 28 cm². El área total de la caja es de 110 cm²

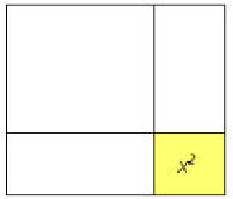


Figura 1.1
Caja de Petri divida en rectángulos

a) ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado? ______________

b) ¿Cuáles son las longitudes de los lados de los rectángulos que forman la caja de Petri?

____

Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros equipos. Observen cuántos procedimientos llevan a la respuesta correcta. ¿Cuáles son aritméticos y cuáles algebraicos? Expliquen por qué ______________________________

____

Problemas y ecuaciones

Los problemas 1 y 2 se pueden resolver de forma aritmética o bien de forma algebraica, sin embargo, la solución aritmética no siempre es posible. En la actividad 2 confirmarán lo anterior.

Actividad 2. En parejas, lean y respondan lo que se pide.

Caída libre de los cuerpos

Problema. En la clase de Ciencias II estudiaron algunas de las aportaciones de Galileo Galilei (1564-1642) a la física. El considerado "padre de la ciencia" descubrió, entre otras cosas, que un objeto que se deja caer desde cierta altura y está sujeto únicamente a la fuerza de atracción gravitacional de la Tierra sigue un movimiento uniformemente acelerado (mua), es decir, un movimiento en el cual la distancia que recorre un móvil en un intervalo de tiempo dado es cada vez mayor. En el recuadro "Caída libre de un cuerpo" se explica más detenidamente la relación entre la distancia recorrida y el tiempo.

Caída libre de un cuerpo

La distancia *(d)* del piso al objeto en cada instante *t*, medido en segundos, a partir del momento en que se suelta, está dada por:

$$d = h_0 - gt^2 \qquad (1)$$

donde h_0 es la altura desde la que se deja caer el objeto, g es la aceleración debida a la gravedad (cuyo valor es 9.8 $\frac{m}{s^2}$) y t es el tiempo medido en segundos.

NOTA: La fórmula $d = h_0 - gt^2$ es exacta cuando el cuerpo se mueve en el vacío. Si el cuerpo se desplaza en la atmósfera, el aire altera la velocidad de la caída; se dice que el aire opone resistencia a la caída. Bajo ciertas condiciones es posible despreciar la resistencia del aire y utilizar la ecuación (1).

a) Una bala de acero se deja caer desde una altura de 400 m; como la bala es muy pesada se ignora la resistencia del aire. ¿En cuánto tiempo chocará contra el piso? ______________

____

b) Describan el procedimiento que utilizaron para encontrar la solución. ______________

____

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Analicen y respondan la siguiente pregunta: ¿es posible resolver el problema mediante un procedimiento aritmético (sin utilizar literales)? ______________________________. Expliquen por qué.

____

Actividad 3. Lee el problema y sigue las sugerencias.

Problema. Tres terrenos tienen forma cuadrada. El lado del segundo terreno mide dos terceras partes que el lado del tercero y éste es el triple del lado del primero. La suma de las áreas de los tres terrenos es igual a 2 053.5 m².

a) ¿Cuánto mide el lado de cada terreno? ______________________________

b) En el recuadro, haz un dibujo que represente este problema.

Reúnete con dos compañeros, comparen sus respuestas y la forma en que representaron la información enunciada en el problema. Comenten si es posible resolverlo con un procedimiento aritmético (sin utilizar literales). ______________________________

____

Problemas

Haz de manera individual en tu cuaderno los procedimientos para resolver los siguientes problemas.

1. Desde una altura de 100 m se deja caer una caja. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, responde:
   a) ¿Qué función describe la distancia de la caja al suelo en términos del tiempo transcurrido? ______________
   ____
   b) Calcula el tiempo que tarda la caja en llegar al piso.
2. De un avión se piensa tirar un explosivo en el cauce de un río; en el punto del impacto, se construirá la boquilla de una presa. El explosivo debe llegar al piso en 15 s para sincronizar con el momento de la explosión. ¿Desde qué altura se debe dejar caer?

Reúnete con otros compañeros y contrasten sus respuestas en los problemas anteriores. Comenten los procedimientos y las dificultades para obtener la solución. Analicen si el procedimiento o los procedimientos que utilizaron son aritméticos o algebraicos. Argumenten sus respuestas.

Ecuaciones cuadráticas y operaciones inversas

Actividad 4. De manera individual, lleva a cabo lo que se pide.

Problema. A partir de la información del recuadro "Forma de la ecuación cuadrática", completa los enunciados.

> **Forma de la ecuación cuadrática**
>
> Una **ecuación cuadrática** es un polinomio de segundo grado igualado a cero, cuya forma es la siguiente:
>
> $$ax^2 + bx + c = 0$$
>
> donde a, b y c son números constantes conocidos y x es la incógnita.

a) Cuando $b = 0$, la ecuación cuadrática es igual a: ____________________

b) Cuando $c = 0$, la ecuación cuadrática es igual a: ____________________

Los problemas que implican alguna de las ecuaciones escritas en los incisos *a* y *b* se estudian en esta lección.

Las ecuaciones de segundo grado suelen tener **dos raíces** o **soluciones**. Por ejemplo, considera la ecuación $x^2 - 4 = 0$. Para despejarla se aplica una operación inversa a la resta —o sea, se suman 4—, luego se saca la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación y se obtiene que:

$$x = \sqrt{4}$$

c) Es decir, x es un número que elevado al cuadrado es igual a 4. ¿Cuántos números cumplen con esta propiedad? ____________. ¿Cuáles son? ____________

Por lo anterior, cuando se obtiene la raíz cuadrada de un número se debe indicar sus dos posibles raíces con el signo ±, que representa que una raíz lleva el signo positivo y la otra el signo negativo. En el caso anterior, es más exacto escribir $x = \pm\sqrt{4}$.

Actividad 5. Hagan la siguiente actividad en parejas.

Problema. Cada alumno formulará tres acertijos de cálculo mental que den lugar a ecuaciones de la forma $ax^2 + b = c$, como se muestra en los ejemplos 1 y 2.

Ejemplo 1. Si se multiplica por 2 un número elevado al cuadrado y se le suma 32 da como resultado 320. ¿Cuál es ese número? (Comprueben que un resultado es $x = 12$.)

Ejemplo 2. Si se divide entre 3 un número elevado al cuadrado y se le resta 18 da como resultado 9. ¿Qué número es? (Encuentren el resultado.)

El alumno que plantea el acertijo debe saber la solución de antemano, para lo cual puede utilizar lápiz y papel. Es conveniente que la solución y los números involucrados sean enteros y el coeficiente del número cuadrado sea menor que 10.

a) Escriban los acertijos que formularon y las soluciones respectivas.

i) ____________________

ii) ____________________

iii) ____________________

b) Describan el procedimiento que utilizaron para encontrar la solución de los acertijos que formuló su compañero. ____________________

c) La operación inversa de la suma es la resta y viceversa. La operación inversa de la multiplicación es la división y viceversa. ¿Cuál es la operación inversa de elevar un número al cuadrado?

____

d) ¿Utilizaron las operaciones inversas para resolver los acertijos? Justifiquen su respuesta.

____

Reúnanse con otras parejas y comparen sus respuestas. Analicen los procedimientos que siguieron para encontrar la solución y expliquen cuál fue el más eficaz para cada quien.

Uso de las TIC

Trabajen en parejas y utilicen una calculadora que tenga la función para sacar raíz cuadrada.

- Realicen de nuevo la actividad 4, pero sin las restricciones de utilizar enteros ni acotar el coeficiente del número cuadrado. Por ejemplo: "Si se multiplica por 1.5 un número elevado al cuadrado y se le suma 0.625 se obtiene como resultado 10. ¿Cuál es ese número? (Comprueben que un resultado es $x = 2.5$.)"

  A quien le toque responder el acertijo debe hacerlo después de realizar las operaciones necesarias en la calculadora.

  a) Escriban los acertijos que formularon y las soluciones respectivas:

  i) ____________________

  ii) ____________________

  iii) ____________________

  b) Describan el procedimiento utilizado para encontrar la solución de los acertijos que les formularon sus compañeros. ____________________

  c) Con base en lo anterior, ¿con cuál de las siguientes expresiones se resuelve la ecuación: $ax^2 + b = c$?

  i) $x = \frac{\pm\sqrt{b-c}}{a}$ ii) $x = \pm\sqrt{\frac{b-c}{a}}$ iii) $x = \pm\sqrt{\frac{c-b}{a}}$ iv) $x = \frac{\pm\sqrt{c-b}}{a}$

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Analicen si su procedimiento está expresado en la ecuación o fórmula que responde correctamente la pregunta anterior.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. El área de la figura 1.2 mide 40 m². El lado del cuadrado rojo mide tres veces el lado del cuadrado verde. ¿Cuáles son las dimensiones de cada cuadrado?

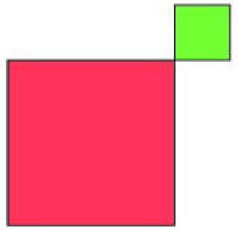


Figura 1.2
Dos cuadrados

2. Encuentra las dimensiones de un rectángulo cuya área mide 384 m² y cuyos lados tienen una proporción de 2:3.

3. Una cápsula espacial se deja caer desde donde termina de la troposfera, o sea, a una altura de 20 km sobre la superficie del mar. ¿Cuánto tiempo tardará en caer?

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la solución de la ecuación $ax^2 - c = 0$?

a) $x = \pm\sqrt{c}$ b) $x = \pm\sqrt{ac}$ c) $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ d) $x = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}$

En equipos, comparen sus respuestas y lleguen a un acuerdo sobre las soluciones correctas. Analicen si todos los problemas tienen una solución única, varias soluciones o ninguna solución.

Comenten si existe diferencia entre encontrar la solución de una ecuación cuadrática sencilla que modela un problema y hallar la solución de dicho problema.

Glosario

Un glosario es una lista de palabras o conceptos con su respectiva definición o explicación. La construcción de un glosario de conceptos matemáticos es una actividad que ayuda a organizar y comprender mejor la materia, contribuye a ampliar el lenguaje matemático, y proporciona otros recursos para la discusión y argumentación matemática. Una vez concluido, podrá ser una fuente de consulta a la cual recurrir en caso necesario.

Por las razones anteriores, en este libro se propone que tú mismo elabores un glosario con los principales conceptos que se van tratando en las lecciones. Para hacerlo, al final de cada lección se sugieren términos importantes en su desarrollo; te corresponde buscar su definición o explicación en la lección, con ello fortalecerás lo aprendido y podrás utilizarlos en tus argumentaciones y explicaciones.

Te toca decidir cómo organizar el glosario en tu cuaderno; lo importante es que sea de fácil consulta. Así, cuando necesites la definición o explicación de un término, la encontrarás sin buscar en las lecciones del libro. Es conveniente que confrontes o amplíes las descripciones de los términos que saques del libro con las de otras fuentes o mediante exploraciones en internet. Esto te permitirá clarificar los conceptos matemáticos. Puedes consultar la bibliografía que se presenta al final del libro.

Los conceptos para iniciar el glosario son:

Ecuación cuadrática **Ecuación de la caída libre de los cuerpos**
Procedimiento aritmético **Procedimiento algebraico**

Lección 2 Congruencia y semejanza

El alumno aprenderá a:
Construir figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizar sus propiedades.

Problema de investigación

De manera individual, lee el siguiente problema y contesta las preguntas.

- A Rocío le gusta mucho la decoración y el diseño y le explica a Braulio lo que quiere hacer:

—Encontré el dibujo de un patito con el que pienso decorar el cuarto de mi hermana —y le muestra a su amigo un diseño como se observa en la figura 2.1—, pero creo que es muy pequeño y me gustaría hacerlo más grande.

—Si quieres yo te ayudo a hacerlo —le propone Braulio y al día siguiente le lleva el dibujo que se ve en la figura 2.2.

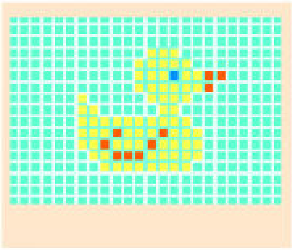


Figura 2.1
Dibujo de Rocío

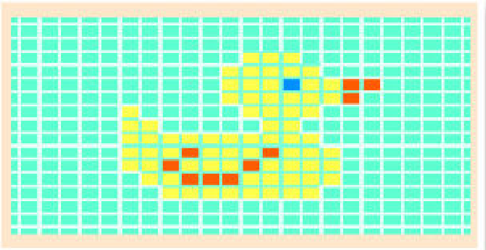


Figura 2.2
Dibujo de Braulio

Rocío observa el dibujo de su amigo y le dice:

—Yo quería que el patito tuviera la misma forma, sólo que más grande, y el que hiciste sí es más grande, pero se ve distorsionado. Mmm, así ya no me gusta.

a) ¿Por qué los dibujos de Rocío y Braulio no tienen la misma forma?

b) ¿Qué puede hacerse para que la figura 2.2 no se vea distorsionada respecto a la 2.1?

En parejas, comparen sus resultados y el procedimiento que siguieron. Lleguen a un acuerdo acerca del procedimiento que les parezca más eficaz.

Congruencia entre dos figuras

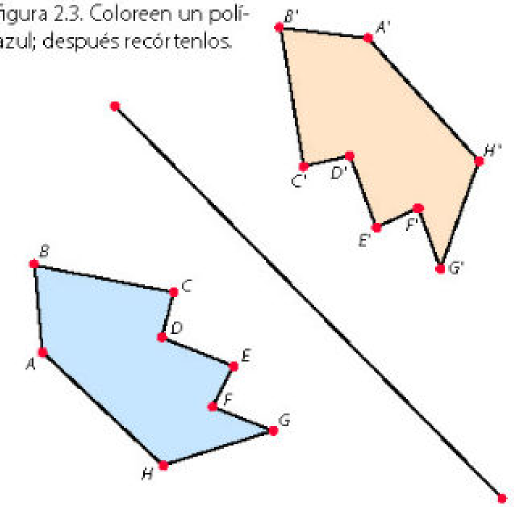
Actividad 1. En equipos de tres o cuatro alumnos, lleven a cabo la siguiente actividad. Para ello necesitarán hojas blancas, lápices de colores y un juego de geometría.

Problema 1. En la figura 2.3, se muestra dos polígonos simétricos y su eje de simetría.

a) Calquen o fotocopien la figura 2.3. Coloreen un polígono de verde y otro de azul; después recórtenlos.

Figura 2.3

Polígonos simétricos



b) Manipulen y comparen los polígonos, midan sus lados y sus ángulos. Si colocan uno encima del otro, ¿qué sucede con todos los elementos de ambos polígonos (vértices, lados y ángulos)? ____________________

c) Escriban en su cuaderno las conclusiones a las que llegaron. Empiecen el enunciado de la siguiente forma: "Dos figuras son simétricas cuando ____________________

Problema 2. En la figura 2.4, se muestran los segmentos $\overline{R'S'}$ y $\overline{RS}$, que tienen la misma longitud. Encuentren el punto *T'* para completar un triángulo *R'S'T'* de manera que, al superponerlo al triángulo *RST*, coincidan en sus vértices, lados y ángulos correspondientes (es decir, *R* con *R'*, *S* con *S'* y *T* con *T'*).

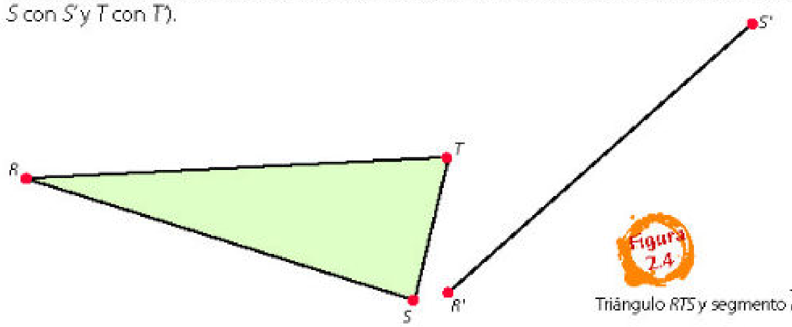


Figura 2.4

Triángulo *RTS* y segmento $\overline{R'S'}$

Congruencia de figuras

Dos figuras son **congruentes** si existe una forma de sobreponerlas tal que coincidan en todos sus puntos.

Para el caso de polígonos, el enunciado anterior es equivalente a: "Dos polígonos son congruentes si se pueden superponer de manera que coincidan en todos sus elementos (vértices, lados y ángulos)".

Hagan lo que se solicita en cada inciso y, con base en la información del recuadro "Congruencia de figuras", respondan las preguntas siguientes.

a) Cada integrante debe trazar en una cartulina un segmento de 13 cm. Tomen este segmento como el lado de un triángulo; sin decir las otras medidas a sus compañeros tracen un triángulo que no sea equilátero. Recorten sus triángulos y muéstrenlos para manipularlos.

¿Cómo son los triángulos? Justifiquen su respuesta. ____________________

b) Ahora propongan dos segmentos cuyas medidas determine el propio equipo. Cada integrante deberá trazar un triángulo que tenga esas dos medidas, elegir la medida del tercer lado y completar un triángulo. Recorten sus triángulos y compárenlos. ¿Cómo son? Justifiquen su respuesta. ____________________

c) Fijen esta vez las tres medidas de los lados del triángulo y asegúrense de que con ellas se pueda construir un triángulo (por ejemplo, no es posible trazarlo con lados cuyas medidas sean 5 cm, 7 cm y 18 cm). Cada integrante tendrá que trazar un triángulo con dichas medidas; recórtenlos y reúnanse para manipularlos.

i) ¿Cómo son los triángulos que obtuvieron? ____________________

ii) ¿Qué características se pueden inferir de dos triángulos en los cuales los lados correspondientes son congruentes? ____________________

Escriban en su cuaderno las conclusiones de este problema. Reúnanse con otro equipo y contrasten sus respuestas. Si hay discrepancias en los resultados, soliciten la guía de su maestro para llegar a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Uso de las TIC

- En parejas, repitan el problema 2 de la actividad 1 utilizando el software GeoGebra. Recuerda que al final del libro se encuentra una pequeña guía de uso de este software.
  a) Tracen un segmento y completen triángulos que coincidan en un lado con este segmento, pero no con los demás segmentos.
  b) Fijen un segundo segmento de medida diferente al primero, construyan triángulos que tengan dos lados iguales a dichos segmentos y el otro háganlo variar arbitrariamente.
  c) Fijen los tres segmentos y construyan triángulos diferentes.
     i) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir? ______________________
     ii) ¿Cómo son sus ángulos correspondientes? ______________________
     iii) Si los imprimen y los recortan, ¿se pueden encimar? ______________________

Organicen una discusión grupal y, con ayuda del profesor, comenten lo observado para formular un resultado general.

Problemas

1. Con un juego de geometría realiza lo siguiente de manera individual.
   a) Reproduce una copia de los polígonos *A* y *B* mostrados en la figura 2.5.

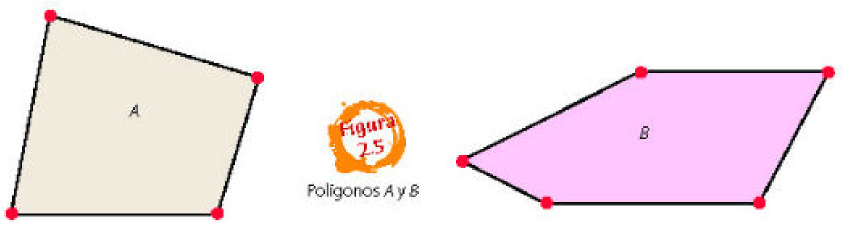


Figura 2.5
Polígonos *A* y *B*

   b) Reúnete con dos compañeros y comenten qué procedimientos siguieron para reproducir los polígonos *A* y *B*.
   c) Recorten sus figuras y superpónganlas a las originales y verifiquen que sean congruentes. En caso de que no lo sean, revisen sus procedimientos.
2. Escribe en las siguientes proposiciones una (V) si es verdadera o una (F) si es falsa. Justifica tus respuestas.
   a) Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son equiláteros y los segmentos $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, entonces los triángulos son congruentes. ______________

   b) Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son isósceles y los segmentos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, entonces los triángulos son congruentes. ______________
   c) Si el triángulo ABC es isósceles y el triángulo $A'B'C'$ es rectángulo, donde $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, entonces los triángulos son congruentes. ______________

En equipos, revisen si todos representaron por medio de dibujos la información de las proposiciones; comparen sus dibujos y las respuestas de los incisos. Si emplearon otra forma de representar la información de las proposiciones, compártanla con sus compañeros y prueben la eficacia de cada procedimiento.

Semejanza

Actividad 2. En parejas, realicen lo que se solicita y contesten las preguntas.

Problema. Rosaura estuvo el fin de semana en un balneario y le regaló a su primo un folleto con información y un croquis del sitio. En la figura 2.6, se muestra una réplica a escala de las albercas que le gustaron a Rosaura.

El primo de Rosaura observa que la alberca tiene la misma forma que el chapoteadero, pero son de distinto tamaño.

Figura 2.6
Réplica a escala de la alberca y el chapoteadero

a) Observen la figura 2.6 y hagan las mediciones que consideren convenientes, tanto de ángulos como de lados. Encuentren y escriban las relaciones que existen entre los elementos correspondientes de los polígonos (por ejemplo, comparen el ángulo F con el F' o el lado $\overline{DE}$ con el $\overline{D'E'}$).

b) ¿Qué propiedades deben cumplir los polígonos para que tengan la misma forma, pero diferente tamaño?

c) ¿Cómo son los polígonos que representan la alberca y el chapoteadero?

d) ¿En qué coinciden las figuras? ______

¿En qué son diferentes? ______

e) Midan los ángulos A y A' de la figura 2.6 y compárenlos. Hagan lo mismo con el $\angle B$ y el $\angle B'$ y así sucesivamente. ¿Qué observan? ______

f) Midan los lados correspondientes —por ejemplo, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$— y calculen el cociente $\frac{AB}{A'B'}$.

g) Calculen los cocientes de la medida de cada lado de la alberca entre su correspondiente del chapoteadero. ¿Qué observan? ______

¿Cómo se llama la relación entre dos tipos de variables x y y en la que $\frac{y}{x}$ es siempre constante? ______

Semejanza entre dos polígonos

Dos polígonos son **semejantes** si todos sus ángulos correspondientes son congruentes entre sí y todos sus lados correspondientes son proporcionales. La constante de proporcionalidad se llama **factor de semejanza**.

Si dos polígonos son congruentes, también son semejantes; pero no siempre dos polígonos semejantes son congruentes.

Actividad 3. En parejas, realicen lo que se pide y después contesten las preguntas que se plantean.

Hasta ahora se ha estudiado cómo saber si dos polígonos son semejantes, pero ¿cómo pueden trazarse dos polígonos semejantes?

Problema. En una cartulina tracen un triángulo ABC cuyos lados midan $\overline{AB} = 15$ cm, $\overline{BC} = 18$ cm y $\overline{CA} = 24$ cm. En la misma cartulina tracen un triángulo $A'B'C'$, semejante al triángulo ABC, tal que $\overline{C'A'} = 8$ cm.

a) ¿Qué medidas usaron para los lados $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$? ______

b) ¿Cuál es el factor de semejanza? ______

c) Midan los ángulos del triángulo ABC y compárenlos con los correspondientes en el triángulo $A'B'C'$. ¿Qué observan? ______

¿Son semejantes los dos triángulos? ______. ¿Por qué? ______

d) Escriban en el siguiente recuadro un mensaje a un compañero explicándole cómo podría dibujar un triángulo semejante a otro dado si se conoce el factor de semejanza.

Reúnanse con otra pareja y comenten si el método en el que se emplea el factor de semejanza funciona para otros polígonos. Por ejemplo, para dibujar un cuadrilátero $ABCD$, midan sus lados, elijan un factor de semejanza k, obtengan las medidas de otro cuadrilátero $A'B'C'D'$ de modo que los lados correspondientes sean proporcionales, esto es, que los cocientes de las medidas de lados correspondientes sean todos iguales al factor de semejanza que escogieron. Con esas medidas construya, cada pareja, un cuadrilátero. ¿Qué sucede?

Actividad 4. En equipos, realicen lo que se pide y respondan las preguntas.

Problema. Tracen un triángulo cualquiera ABC y midan el $\measuredangle CAB$ y el $\measuredangle ABC$. Cada integrante del equipo deberá trazar un triángulo ABC más grande tal que $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$.

a) Los integrantes deberán comparar entre sí los triángulos que obtuvieron y luego compararlos con el original. ¿Cómo son entre sí los triángulos que dibujaron?

b) ¿Algún triángulo o algunos son semejante al triángulo ABC? ______. Justifiquen su respuesta. ______

Problemas

Reúnete con otro compañero y respondan lo que se pide.

1. Escriban si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifiquen su respuesta.
   a) "Eduardo afirma que los rectángulos siempre son semejantes porque siempre tienen todos sus ángulos iguales." ______________________
   b) "Fanny asegura que cualquier polígono regular es semejante a cualquier otro polígono regular con el mismo número de lados. Es decir, todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí; todos los cuadrados son semejantes entre sí; todos los pentágonos regulares son semejantes entre sí, etcétera."
2. Regresen al "Problema de investigación" y revisen su respuesta. Si es necesario corríjanla. Escriban en su cuaderno una nota dirigida a Rocío en la cual le expliquen qué necesita hacer para obtener una figura de la "misma forma, sólo que más grande".
   a) En una hoja cuadriculada cada quien debe realizar un dibujo semejante al de Rocío y responder qué factor de semejanza tiene su dibujo respecto al original. ______________________
   b) Comparen sus dibujos con los de otros compañeros y verifiquen que, si el factor de semejanza es mayor que 1, el dibujo tiene la misma forma y es más grande. ¿Qué sucede si utilizan un factor de semejanza menor que 1, por ejemplo, 0.6? ______________________

En parejas, comparen sus respuestas al problema 1. Analicen el tipo de argumentos que utilizan para decir si el enunciado es falso o verdadero. Con ayuda de su profesor decidan qué argumentos son más sólidos.

Repasa lo aprendido

De manera individual haz en tu cuaderno lo siguiente.

1. Traza un triángulo cualquiera ABC y a partir de él traza otro triángulo $A'B'C'$ más pequeño de tal manera que cumpla con las siguientes condiciones: $\frac{2}{3}\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\frac{2}{3}\overline{BC} = \overline{B'C'}$ y que $\measuredangle A = \measuredangle A'$.

   ¿Cómo es el triángulo que trazaste? ______________________. Justifica tu respuesta.

2. Traza un polígono semejante a los que se muestran en la figura 2.7 (polígonos A, B y C). Para cada polígono escribe el factor de semejanza.

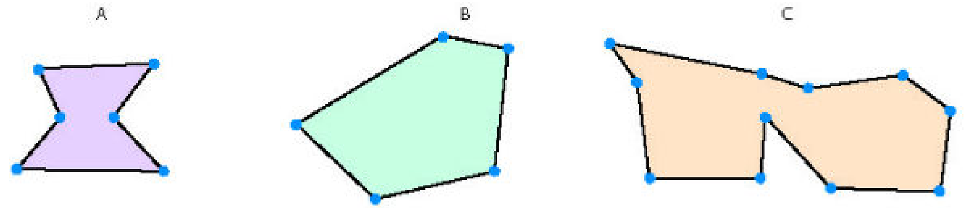


Figura 2.7
Polígonos A, B y C

Compara tus figuras con las de otro compañero. Expliquen qué datos tomaron en cuenta para dibujar los polígonos semejantes y cómo definieron el factor de semejanza.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Congruencia **Semejanza** **Factor de semejanza**

Lección 3

Propiedades de figuras congruentes y semejantes

El alumno aprenderá a:
Explicitar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Problema de investigación

De manera individual, lee la situación que se plantea y haz lo que se pide.

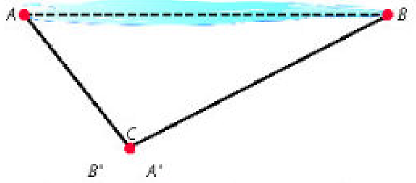
- En una de sus excursiones por el área natural protegida (ANP) del Chichinautzin en Morelos, Ricardo y Alberto encontraron una charca que sólo se forma en temporada de lluvias. Con unas piedras marcaron dos de sus extremos, como se muestra en la figura 3.1 (las piedras están representadas por los puntos *A* y *B*).

Figura 3.1
Charca formada en temporada de lluvias

—¿Aproximadamente cuánto medirá de largo esta charca? —le pregunta Ricardo a Alberto.

—Es difícil medirla directamente, pues se necesitaría una lancha y una cinta métrica muy larga —dice Alberto y luego agrega—, pero se puede averiguar de manera indirecta —toma una vara y sobre la tierra empieza a bosquejar su idea—. Si ponemos una estaca en el punto *C*, podemos trazar y medir una recta que vaya de *A* a *C* y otra de *B* a *C* (figura 3.2).

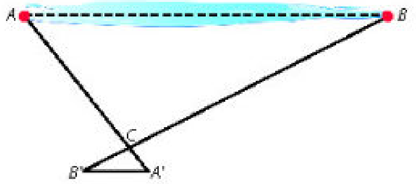
Figura 3.2
Triángulo *ABC* trazado por Alberto



Después de trazar y medir las rectas indicadas, los amigos encuentran que la recta $\overline{AC} = 40$ m y la $\overline{BC} = 60$ m.

Alberto sugiere prolongar 4 m la recta $\overline{AC}$ y 6 m la recta $\overline{BC}$, para ubicar los puntos *A'* y *B'*. Además miden el segmento $\overline{A'B'}$, que es igual a 8 m (figura 3.3).

Figura 3.3
Triángulo *A'B'C'* trazado por Alberto



a) ¿Cuál será el plan de Alberto para determinar la longitud de la charca?

____

b) Reúnete con un compañero y comenten si han comprendido la pregunta del inciso *a*. _______________

c) Determinen cuánto mide la longitud de la charca a partir del plan de Alberto.

____

Polígonos congruentes y semejantes

En la lección 2, construyeron polígonos congruentes y semejantes; asimismo, se analizaron algunas propiedades de estas figuras geométricas.

¿Existen otras formas de asegurar que dos figuras son congruentes, además de las que se estudiaron en la lección anterior? Las siguientes actividades permitirán hacer exploraciones para responder dicha pregunta.

Actividad 1. Formen equipos de cuatro alumnos y realicen lo que se pide; para ello necesitarán cartulina, cinta adhesiva, tijeras y un juego de geometría.

Problema. Cada integrante debe cortar dos tiras de cartulina de 1 cm de ancho y del largo que se indica en seguida:

- 5 cm y 6 cm;
- 7 cm y 11 cm;
- 9 cm y 9 cm;
- 8 cm y 11 cm

Con cada pareja de tiras formen un triángulo; corten la tercera tira del tamaño que se requiera para construirlo.

Comparen los triángulos que construyeron. ¿En qué se asemejan? _______________

¿En qué difieren? _______________

a) Utilicen las parejas de tiras del problema y añadan una tira más para obtener cuatro ternas de tiras con las siguientes medidas.

- 5 cm, 6 cm y 9 cm;
- 7 cm, 11 cm y 15 cm;
- 9 cm, 9 cm y 9 cm;
- 8 cm, 11cm y 17cm.

Cada quien tendrá que armar los cuatro triángulos resultantes y luego compararlos. ¿Qué observan? _______________

b) Tomen los pares de tiras utilizadas en el problema. Formen triángulos con esas tiras, pero con la condición de que los ángulos comprendidos entre ellas tengan las siguientes medidas, respectivamente: 30°, 48°, 25° y 72°.

Comparen sus triángulos. ¿Qué observan? _______________

c) Ahora cada uno de los integrantes deberá tomar una tira de 11 cm, llamar a uno de sus extremos *A* y, con cualquier otra tira, formar un ángulo de 50° en *A* (se dice que este ángulo es adyacente al segmento *A*). Después tendrán que completar un triángulo sin mover este ángulo (si es necesario recorten una nueva tira).

Observen los triángulos que hicieron sus compañeros y compárenlos con el suyo. ¿Qué sucede? _______________

d) Tomen la tira del inciso *c* (uno de cuyos extremos es *A*) y llamen *B* al otro extremo. Tomen una tira cualquiera y formen en *A* un ángulo de 60°. Tomen otra tira —o recorten una nueva si es necesario— para formar un ángulo de 70° en *B* y construyan un triángulo.

Compárenlos y escriban las semejanzas y las diferencias. _______________

____

e) Como habrán advertido en algunos incisos de este problema, los datos de partida —esto es, la longitud de los lados o la medida de los ángulos— son suficientes para determinar si los triángulos son congruentes. En otros incisos, estos datos no son suficientes. Con base en lo observado en esta actividad, ¿cómo completarían la tabla 3.1? Justifiquen cada una de sus respuestas.

Tabla 3.1 Criterios para construir triángulos congruentes		
Criterio	**Es suficiente**	**No es suficiente**
Dos lados congruentes		
Tres lados congruentes		
Dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente		
Un lado y un ángulo adyacente son congruentes		
Un lado y los dos ángulos adyacentes son congruentes		

Las actividades que acaban de hacer ilustran los criterios de congruencia de triángulos, sin embargo, no se consideran una demostración. En algunos casos, es posible que todos hayan construido triángulos congruentes, pero que las condiciones propuestas en el inciso permitan construir otros triángulos que las cumplan sin que sean congruentes con los que ustedes construyeron.

En grupo y con la ayuda de su maestro, comparen sus respuestas y entre todos lleguen a conclusiones verdaderas sobre los criterios de congruencia. Luego compárenlas con las que se enuncian en el recuadro "Criterios de congruencia de triángulos". Revisen la notación usada para nombrarlos y asegúrense de comprenderla porque volverán a ella.

Criterios de congruencia de triángulos

Si dos triángulos tienen sus tres lados congruentes, entonces los triángulos son congruentes. Este criterio se denomina **lado-lado-lado (LLL)**.

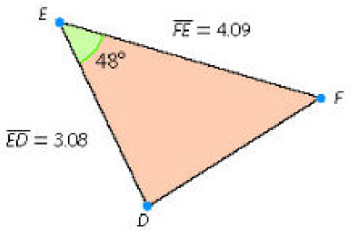
Si dos triángulos tienen dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente en los dos triángulos, entonces los triángulos son congruentes. Este criterio se conoce como **lado-ángulo-lado (LAL)**. Es importante que la letra *A* esté entre las dos letras *L* para denotar que se trata del ángulo comprendido entre los dos lados.

Si dos triángulos tienen un lado y sus dos ángulos adyacentes congruentes, entonces los triángulos son congruentes. Este es el criterio **ángulo-lado-ángulo (ALA)**.

Problemas

En parejas, resuelvan los problemas que se plantean.

1. Con base en la información de los triángulos de la figura 3.4, completa la tabla 3.2 indicando qué parejas de triángulos son congruentes mediante el criterio LAL.



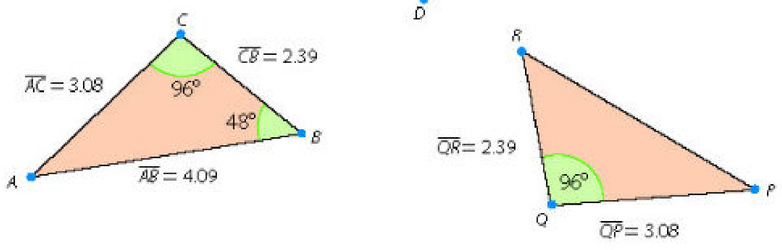


Figura 3.4
Triángulos con diferentes medidas de ángulos y lados

Tabla 3.2 Parejas de triángulos congruentes mediante el criterio LAL		
Triángulos	**¿Son congruentes por medio del criterio LAL?**	**¿Qué lados y qué ángulos son congruentes?**
ABC y *DEF*		
ABC y *PQR*		
DEF y *PQR*		

2. Regresen al "Problema de investigación" y revisen lo que respondieron. Corríjanlo si es necesario. Analicen, si es el caso, por qué se habían equivocado o qué información les faltaba para poder resolverlo.

Al terminar, comparen sus respuestas con las de otras parejas. Donde haya discrepancias argumenten sus respuestas y encuentren el origen de estas diferencias y los errores posibles. Anoten las dudas que queden para plantearlas en un panel grupal con la coordinación del maestro.

Actividad 2. En equipos de tres alumnos, hagan lo que se pide.

Problema 1. Dibujen un triángulo cualquiera con vértices *A*, *B* y *C* en la mitad superior de una hoja tamaño carta.

a) Marquen un punto cualquiera en la mitad inferior y llámenlo *A'*.
b) Con las escuadras tracen una paralela a $\overline{AB}$ por *A'* y llámenla R_1.
c) Sobre la paralela que acaban de trazar, elijan un punto cualquiera y llámenlo *B'*.
d) Con sus escuadras tracen una paralela a $\overline{AC}$ por *A'* y llámenla R_2.
e) Con sus escuadras tracen una paralela a $\overline{BC}$ por *B'* y llámenla R_3.
f) Llamen *C'* al punto de intersección de R_2 con R_3.
g) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los triángulos *A'B'C'* y *ABC*? ____________

____
h) Midan con el transportador los ángulos $\measuredangle A$ = , $\measuredangle A'$ = , $\measuredangle B$ = , $\measuredangle B'$ = , $\measuredangle C$ = , $\measuredangle C'$ =
i) Midan los segmentos siguientes y escriban las medidas.

$\overline{AB}$ = ________ $\overline{A'B'}$ = ________

$\overline{BC}$ = ________ $\overline{B'C'}$ = ________

$\overline{CA}$ = ________ $\overline{C'A'}$ = ________

j) Obtengan los cocientes:
$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ = ________ $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ = ________ $\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ = ________
k) ¿Cómo son los triángulos *ABC* y *A'B'C'*? ____________
l) ¿Los lados correspondientes son proporcionales? ________ ¿Por qué? ________

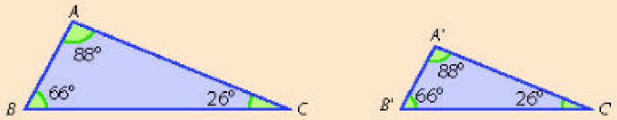
____

Analicen la información del recuadro "Criterios de semejanza de triángulos" y contrástenla con las afirmaciones y construcciones que hicieron anteriormente.

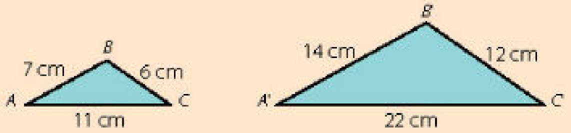
Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si se cumple alguno de los siguientes criterios de semejanza.

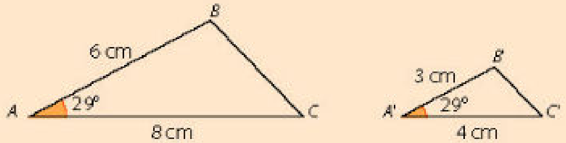
- **Criterio AAA.** Si en ambos los tres ángulos son congruentes.



- **Criterio LLL.** Si ambos tienen los tres lados proporcionales.



- **Criterio LAL.** Si ambos tienen un ángulo congruente y los lados que lo forman son proporcionales.



Problema 2. El pino pátula, también conocido como pino llorón o pino mexicano amarillo, es una especie originaria de México y mide de 20 m a 40 m de altura.[1] Para medir árboles de gran altura de manera indirecta se suele usar un espejo. Este método se basa en una ley de la óptica que afirma: "El ángulo de incidencia de un rayo de luz que se refleja en un espejo es igual al ángulo de reflexión". El método es el siguiente:

- La persona se aleja del pino en línea recta y se detiene en un punto en el que coloca el espejo en el suelo; luego vuelve a alejarse un poco más de manera que se alcance a ver la punta del pino reflejada en el espejo.
- Se miden las distancias del árbol al espejo y del observador al espejo. Se obtiene el cociente de estas distancias (de la mayor entre la menor). Luego se mide la distancia del suelo al ojo del observador y se multiplica por el cociente obtenido.

a) Tracen en su cuaderno un diagrama que ilustre el método descrito.

b) ¿Qué triángulos se forman? ________________________________

c) ¿Cuáles son sus vértices correspondientes? ______________________

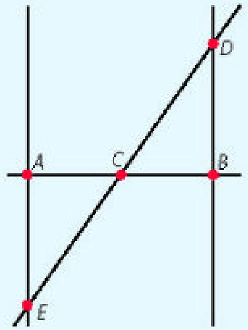
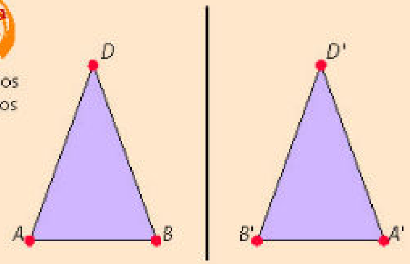
d) ¿Cuántos y cuáles ángulos son congruentes en este procedimiento? ____________

e) ¿Qué criterio de semejanza se desprende de esta situación? ________________

Problema 3. Los enunciados de la tabla 3.3 son consecuencia de los criterios LAL y ALA para determinar la congruencia de triángulos. En las figuras 3.5 y 3.6 completen la justificación; para el enunciado del inciso *c* tracen la figura que lo represente y escriban también la justificación. Sean claros y ordenados al argumentar.

[1] Información tomada de http://ecuadorforestal.org/fichas-tecnicas-de-especies-forestales/ficha-tecnica-no-14-pino-pinus-patula/ (Consulta: 21 de enero de 2017)

Tabla 3.3 Justificación de congruencia de triángulos mediante los criterios LAL y ALA

Enunciado y figura	Justificación
a) En la figura 3.5, los puntos E, C y D están en la misma línea; C es punto medio de $\overline{AB}$. $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AE} \perp \overline{AB}$, entonces $\overline{AE} = \overline{BD}$.  Figura 3.5	i) $\overline{AC} = \overline{CB}$ (dado en el enunciado). ii) $\measuredangle CAE = \measuredangle CBD = 90°$, porque ________ iii) $\measuredangle BCD = \measuredangle ACE$, porque ________ iv) Por el criterio ________, los triángulos ACE y BCD son congruentes. v) Entonces todos sus lados correspondientes son iguales y $\overline{AE}$ = ________.
b) En el triángulo ABD, $\overline{AD} = \overline{BD}$. Entonces $\measuredangle A = \measuredangle B$. Para justificar este enunciado, se traza un triángulo $A'B'D'$ simétrico al triángulo ABD respecto a una recta cualquiera como se muestra en la figura 3.6. Figura 3.6 Triángulos simétricos 	i) $\overline{AD} = \overline{DB}$ (dado en el enunciado). ii) $\overline{AD}$ = ________ (por simetría). iii) $\overline{DB}$ = ________ (por ________). iv) $\measuredangle A = \measuredangle$ ________ (por ________). v) $\measuredangle B = \measuredangle$ ________ (por ________). vi) $\overline{AD}$ = ________ = ________ = ________ (por ________) y $\measuredangle D = \measuredangle$ ________ (por ________). vii) Entonces los triángulos ________ y ________ son congruentes y ________
c) En un triángulo isósceles, la altura, la mediana y la mediatriz del lado desigual coinciden.	

Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Describan las diferencias que encontraron en cuanto al procedimiento; asimismo, determinen las respuestas y el procedimiento correctos. Escriban las dudas que hayan quedado para presentarlas en una discusión grupal y con ayuda de su maestro resuélvanlas con todo el grupo.

Uso de las TIC

- De manera individual, explora con el software GeoGebra si las siguientes afirmaciones son correctas.

  a) Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes, entonces son semejantes.

  b) Si dos triángulos tienen un ángulo congruente y los lados que lo forman son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

i) Para el inciso *a*, traza dos triángulos cuyos ángulos correspondientes sean congruentes. Nombra los vértices y los triángulos correspondientes en la figura 3.9.

ii) Traslada el triángulo azul de manera que uno de los ángulos congruentes coincida con el del triángulo rojo.

iii) Observa y analiza. Recuerda el concepto de congruencia de ángulos entre paralelas estudiado en el bloque 1 de segundo grado.

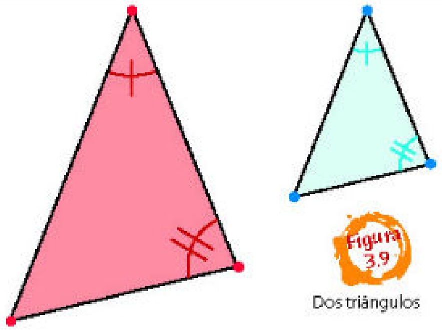


Figura 3.9 Dos triángulos

En equipo, exploren si las afirmaciones de los incisos *a* y *b* son correctas.

Con la guía de su maestro, realicen una discusión grupal sobre lo que descubrieron y entre todos lleguen a conclusiones verdaderas sobre los criterios de semejanza de triángulos. Compárenlos con los criterios del recuadro "Criterios de semejanza de triángulos".

Repasa lo aprendido

Resuelve los problemas en tu cuaderno. Al finalizar, con la guía de su maestro organícense para resolverlos en el pizarrón.

1. ¿Se puede generalizar el criterio LLL para cuadriláteros? Es decir, si en dos cuadriláteros sus lados correspondientes son congruentes, ¿los cuadriláteros son congruentes? Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si no lo es, busca un ejemplo que ilustre que el criterio LLL no siempre se cumple para cuadriláteros. (A los ejemplos que invalidan una afirmación se les llama *contraejemplos*.)
2. Elsa y Jorge quieren conocer la distancia que existe entre las orillas de un acantilado. Ellos se localizan en el punto *F* y saben que el punto *D* —al otro lado del acantilado— es tal que el segmento $\overline{DF}$ es perpendicular a la orilla del acantilado en el que se encuentran. ¿Cómo pueden hacer esta medición indirectamente? Elsa y Jorge llegaron a ese punto en caballo y cuentan con una cinta métrica.
3. Los triángulos de la figura 3.10 son semejantes. ¿Cuánto miden los ángulos y los lados que faltan en la figura?

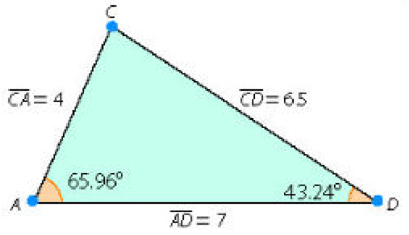
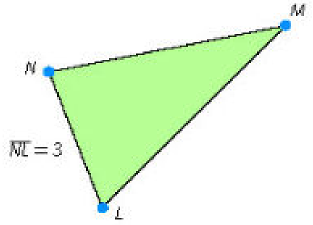


Figura 3.10 Triángulos semejantes



Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Lados correspondientes **Ángulos adyacentes** **Lado opuesto**

Lección 4

Diferentes representaciones de una situación

El alumno aprenderá a:
Analizar representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificará las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

Problema de investigación

Reúnete con un compañero, realicen lo que se pide y respondan las preguntas.

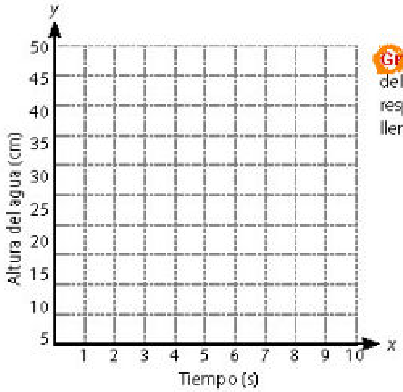
- A partir del momento en que empieza a llenarse el recipiente de la figura 4.1, la altura del agua aumenta a razón de 2.5 $\frac{cm}{s}$.

a) Determinen la altura del recipiente para los primeros 10 segundos completando la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Altura del agua en el recipiente y tiempo de llenado

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura del agua en el recipiente (cm)										

b) Con base en los datos de la tabla 4.1, tracen la gráfica 4.1 en la cual se representa la altura del agua en el recipiente respecto al tiempo de llenado.



Gráfica 4.1 Altura del agua en el recipiente respecto al tiempo de llenado

Figura 4.1 Llenado de recipiente en forma cilíndrica

c) ¿Cuál es la expresión algebraica de la altura (*y*) respecto al tiempo (*x*)?

____

d) ¿Cuál es la relación entre el tiempo y la altura? Justifiquen su respuesta.

____

e) ¿En qué parte de la gráfica se observa la razón de llenado del recipiente?

____

f) ¿En qué parte de la expresión algebraica se observa la razón de llenado del recipiente? ______________________________

Comparen las tablas, gráficas y expresiones algebraicas que propusieron con las de otras parejas. Si hay diferencias revisen y argumenten sus propuestas. Lleguen a un acuerdo sobre las soluciones correctas y las respuestas a los incisos.

Relación proporcional

Proporcionalidad entre dos variables

La relación entre dos variables es **proporcional** si al variar una, la otra varía de modo que su cociente es constante. Esto es, si las variables son x y y, entonces $\frac{y}{x} = k$, donde k es constante. Si el cociente $\frac{y}{x}$ no es constante (es decir, si este cociente varía), entonces la relación entre x y y **no es proporcional.**

Actividad 1. Trabajen en equipos de tres o cuatro alumnos para llevar a cabo esta actividad.

Problema. En un restaurante todas las mesas son cuadradas y en cada una pueden acomodarse cuatro sillas. Cuando se reúnen grupos de comensales las mesas se colocan en fila; en la figura 4.2 se muestran los arreglos con una, dos y tres mesas, respectivamente.

Una mesa   Dos mesas   Tres mesas

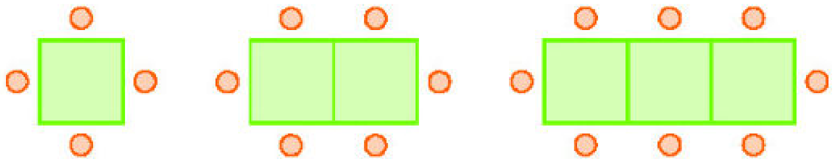


Figura 4.2 Arreglos de sillas y mesas en fila

a) ¿Cómo completarían la tabla 4.2 con el número de sillas que pueden acomodarse en cada fila de acuerdo con la cantidad de mesas?

Tabla 4.2 Número de sillas y mesas acomodadas en fila

Núm. de mesas	1	2	3	4	5
Núm. de sillas					

b) Tracen en su cuaderno una gráfica donde el eje x represente el número de sillas y el eje y el número de mesas.

c) Si n es el número de mesas en una fila, ¿cuál es la expresión algebraica del número x de sillas que se pueden acomodar? ______________________

d) ¿Cómo es la relación entre x y n? ______________________

Comparen sus gráficas con las de otros equipos. ¿Obtuvieron la misma gráfica? ________. Si trazaron gráficas distintas, escriban cuáles son las diferencias y coméntenlas con todo el grupo; con la guía de su maestro lleguen a un acuerdo.

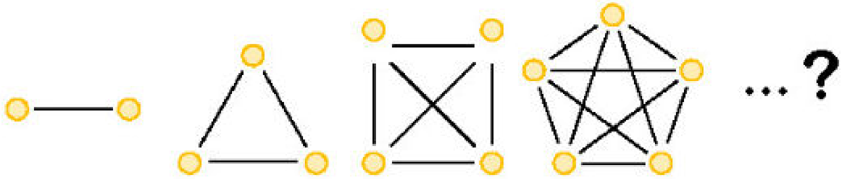
Den argumentos matemáticos sólidos y utilicen términos y conceptos estudiados en grados anteriores (pendiente, función lineal, ordenada al origen).

Con base en la información de la tabla 4.2, planteen una pregunta relativa al arreglo de sillas y mesas observado en la figura 4.2.

Conexiones en un grupo

Actividad 2. De manera individual haz lo que se pide.

Problema. Un juego de internet consiste en determinar cuántas conexiones pueden formarse entre todas las parejas que intervienen. Si sólo hay dos participantes se crea una sola conexión, si en el juego participan tres individuos se forman tres conexiones y así sucesivamente como se muestra en la figura 4.3.



2 jugadores 1 conexión | 3 jugadores 3 conexiones | 4 jugadores 6 conexiones | 5 jugadores 10 conexiones | x jugadores 66 conexiones

Figura 4.3 Número de conexiones entre parejas con diferente cantidad de jugadores

a) Para determinar el número de conexiones que se forman en el juego de internet en grupos de hasta 12 jugadores, completa la tabla 4.3.

Tabla 4.3 Número de jugadores y de conexiones en el juego de internet

Núm. de jugadores	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Núm. de conexiones											

b) Traza en tu cuaderno un plano cartesiano y ubica en él los puntos (número de jugadores, número de conexiones) que determinaste en el inciso *a*.

c) ¿Cómo es la relación entre el número de jugadores y el número de conexiones? Argumenta tu respuesta. ______________________

____

d) ¿Cuál es la expresión algebraica del número de conexiones que se forman si hay n jugadores?

____

En parejas, comparen las expresiones algebraicas del inciso *d*. ¿La solución es única o puede haber varias soluciones? Expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas y lleguen a un acuerdo sobre la respuesta correcta.

Juego de cerillos

Actividad 3. Formen equipos de tres alumnos para hacer esta actividad, así como para responder las preguntas que se plantean.

Problema. Supongan una situación en la que hay tres espacios contiguos en línea recta del tamaño de un cerillo. Se coloca un cerillo en el espacio de cada uno de los extremos de manera que las cabezas se opongan (posición inicial de la figura 4.4). El problema consiste en tratar de pasar de la posición inicial a la posición final mostrada en el paso III de la figura 4.4. Las reglas son:

1. Un cerillo puede avanzar en la dirección en que apunta su cabeza siempre que exista un espacio frente a él (paso I de la figura 4).
2. Cuando dos cerillos estén enfrentados cabeza con cabeza uno de ellos puede brincar al otro siempre que detrás haya un espacio vacío (paso II de la figura 4.4).

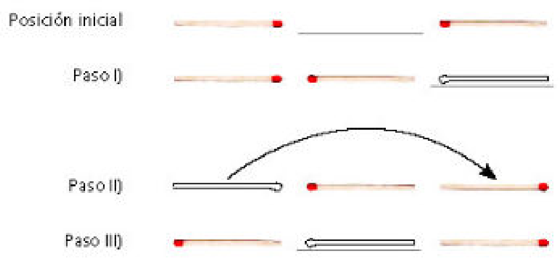


Figura 4.4 Pasos del juego de cerillos

El problema de pasar de la posición inicial a la final cuando hay un cerillo en cada uno de los lados está resuelto en la figura 4.4. El objetivo de este problema es determinar tanto la secuencia exacta que permite llegar a la solución como el número de pasos con que se logra hacerlo.

a) Encuentren la solución del problema cuando en la posición inicial hay dos cerillos en cada uno de los lados (figura 4.5, posición inicial) y debe llegarse a la posición final (figura 4.5, posición final). Cuenten el número de pasos necesarios para ir de la posición inicial a la final.

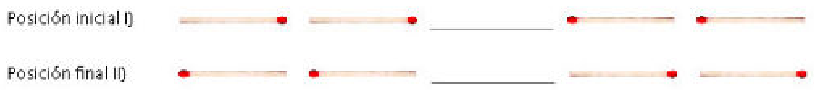


Figura 4.5 Posiciones inicial y final del juego con dos cerillos en cada uno de los lados

b) Encuentren la solución del problema cuando en la posición inicial hay tres cerillos en cada uno de los lados (figura 4.6, posición inicial) y debe llegarse a la posición final (figura 4.6, posición final). Cuenten el número de pasos necesarios para ir de la posición inicial a la final.

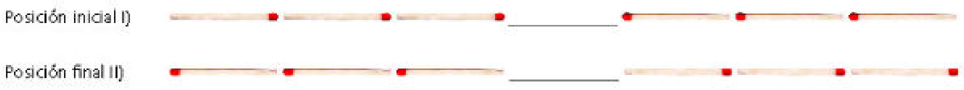


Figura 4.6 Posiciones inicial y final del juego con tres cerillos en cada uno de los lados

c) Escriban en la tabla 4.4 el número de pasos que se requieren para resolver el problema del inciso *b*.

Tabla 4.4 Número de cerillos y de pasos para invertir su posición

Núm. de cerillos en cada lado	1	2	3
Núm. de pasos para invertir su posición			

d) ¿Cuál es la fórmula para encontrar el número de pasos que invierten la posición de los cerillos, si *n* es el número de cerillos en cada lado? ____________

e) Utilicen la fórmula del inciso *d* para encontrar el número de pasos que toma invertir la posición de los cerillos cuando hay cuatro cerillos en cada lado. ____________

f) ¿Cómo es la relación entre el número de cerillos en cada lado y el número de pasos para invertir la posición de los cerillos? ____________

g) Eduardo, Lorena y Rocío jugaron con dos, cuatro y seis cerillos de cada lado, respectivamente, y obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 4.5.

Tabla 4.5 Número de cerillos y de pasos para invertir su posición

Núm. de cerillos en cada lado	2	4	6
Núm. de pasos para invertir su posición	8	24	48

i) ¿Están en lo correcto? Justifiquen su respuesta. ____________

ii) Escriban la expresión algebraica que relaciona el número de cerillos de cada lado y el número de pasos para invertir la posición. ____________

iii) Si *n* es un número natural (entero positivo diferente de cero), ¿cuál de las siguientes reglas es la correcta?

- $N = 3 + 5(n - 1)$
- $N = 3n + 8$
- $N = n(n + 2)$

Comparen las expresiones algebraicas que obtuvieron. ¿Son iguales? ____________

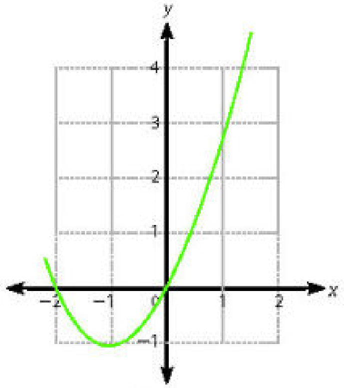
Si la respuesta no es afirmativa, escriban qué diferencias encontraron en las expresiones y por qué son diferentes. ____________

Uso de las TIC

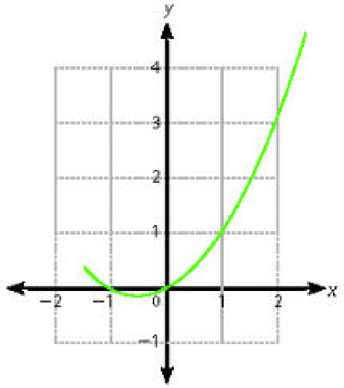
En parejas, lleven a cabo lo que se solicita.

1. Las funciones de los incisos *a*, *b*, *c* y *d* se relacionan con situaciones vistas en esta lección. Asocien tales funciones con la gráfica que le corresponde.

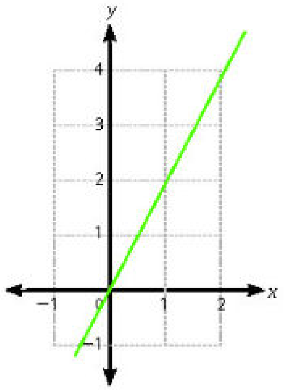
   a) $y = 2x$ b) $y = x(x+2)$ c) $y = \frac{x(x+1)}{2}$ d) $y = 0.5x$



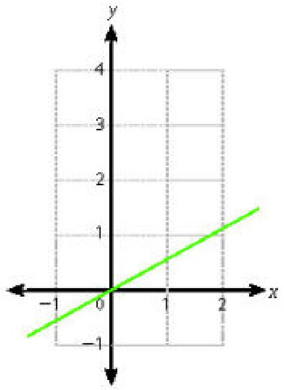
Gráfica 4.2



Gráfica 4.3



Gráfica 4.4



Gráfica 4.5

2. Comprueben con el software GoeGebra que, en el ejercicio 1, la manera en que asociaron las funciones con las gráficas fue correcta. Escriban las funciones y observen la gráfica que la describe. Con base en lo que observan respondan:

   a) De las situaciones vistas en la lección, ¿a cuál corresponde cada una de las parejas formadas por la función y su gráfica? ________________

   b) ¿Qué gráficas son lineales y cuáles no? ________________

Comparen las gráficas obtenidas con el software GeoGebra con las de otras parejas. En caso de que no coincidan, revisen y argumenten su respuesta.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. El precio (p) de un producto depende de la oferta (O). A partir de un precio base (B), el precio disminuye si la oferta aumenta. ¿Cuál de las siguientes expresiones representar la situación descrita?

   a) $p = B + O$ b) $p = B \times O$ c) $p = B - O$ d) $p = B^O$

2. Traza en tu cuaderno un plano cartesiano y grafica la expresión que elegiste en el problema 1. Asigna al precio base (B) un valor constante de 20 y valores de 0 a 10 a la oferta (O).

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. ¿Cómo es la relación entre el precio p y la oferta O de un producto? ________________

Escriban en el siguiente recuadro la manera en que explicarían a otros compañeros, a partir de la gráfica que trazaron, la situación descrita en el ejercicio 1.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Relación proporcional entre dos variables

Lección 5 Variación cuadrática

El alumno aprenderá a:
Representar tabular y algebraicamente relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Problema de investigación

En equipos de tres alumnos, hagan lo que se pide y resuelvan el problema planteado.

- Una compañía de lubricantes automotrices encargó un estudio para optimizar la cantidad de material usado en los envases de sus productos. La pregunta central del estudio es: "¿Cuáles deben ser las dimensiones de un bote de aceite de 1 ℓ de manera que se utilice la menor cantidad de lámina?"

Con una pieza de lámina se construirá un bote cilíndrico como el que se muestra en la figura 5.1. El radio de la base mide r y la altura, h.

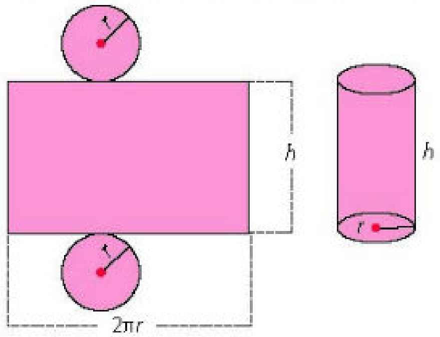


Figura 5.1
Desarrollo plano de un bote cilíndrico de radio r y altura h

a) Escriban la expresión algebraica que representa el área de la lámina utilizada para hacer el bote. ______

b) Escriban la expresión algebraica que representa el volumen del bote.
______

c) Si la capacidad del bote es de 1 ℓ, consideren que 1 ℓ = 1 000 cm³. Utilicen la expresión del inciso *b* e iguálenla a 1 000; expresen la altura h en términos del radio. ______

d) Sustituyan la expresión de la altura h (inciso *c*) en la expresión algebraica del área (inciso *a*), para obtener una función que permita calcular el área A del recipiente en términos de r. ______

e) Completen la tabla 5.1 para los valores de los radios que se indican.

Tabla 5.1 Área y radio de envases con capacidad de 1 ℓ

r	4.00	4.25	4.50	4.75	5.50	5.75	6.00	6.25	6.50
A									

f) Con base en los datos obtenidos en la tabla 5.1, ¿para qué valor del radio se obtiene el área mínima? ______

g) Calculen la dimensión de la altura del bote. ______

h) Consigan un envase cilíndrico cuya capacidad sea de 1 ℓ, midan las dimensiones y compárenlas con los resultados que obtuvieron.

Reúnanse con otro equipo y comparen las dimensiones de las latas de 1 ℓ que llevaron. ¿Coinciden en los resultados obtenidos? En caso de haber diferencias importantes, revisen y argumenten sus propuestas. Lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Problemas

1. Trabajen en parejas y, con base en los resultados obtenidos en el "Problema de investigación", elijan las respuestas correctas de los incisos. Justifiquen todas las elecciones.

   a) ¿Cuál es la expresión algebraica que se utiliza para calcular el área A de la lata en términos del radio r y la altura h?
   i) $h = \frac{1\,000}{\pi r^2}$ ii) $V = \pi r^2 h$ iii) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ iv) $A = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica del volumen V de la lata?
   i) $h = \frac{1\,000}{\pi r^2}$ ii) $V = \pi r^2 h$ iii) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ iv) $A = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$

   c) ¿Cuál es la altura h del cilindro en términos del radio r?
   i) $h = \frac{1\,000}{\pi r^2}$ ii) $V = \pi r^2 h$ iii) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ iv) $A = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$

   d) ¿Cuál es la expresión algebraica del área A que se utiliza para hacer la lata en términos del radio r?
   i) $h = \frac{1\,000}{\pi r^2}$ ii) $V = \pi r^2 h$ iii) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ iv) $A = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$

2. El equipo de Lorena determinó los datos de la tabla 5.2 para el área A de la lata de acuerdo con las dimensiones del radio.

Tabla 5.2 Área y radio de envases con capacidad de 1 ℓ

r (cm)	4.00	4.25	4.50	4.75	5.50	5.75	6.00	6.25	6.50
A (cm²)	600	584	571	563	554	555	559	565	573

Comparen los resultados que obtuvieron en la tabla 5.1 del "Problema de investigación" con los datos de la tabla 5.2 calculados por el equipo de Lorena. ¿Coinciden sus resultados? En caso contrario, revisen sus procedimientos y las operaciones realizadas. Justifiquen su respuesta.

Melisa afirma que encontró otro valor para el radio r del envase con el cual se utiliza menos material. ¿Están de acuerdo con lo que afirma Melisa? ______ ¿Qué valores podría tener el radio r? ______. Justifiquen su respuesta.
______

Uso de las TIC

- De manera individual en el software GeoGebra efectúa lo que se pide.
  a) Escribe en el software GeoGebra la función del área de la lámina de la lata: $A = 2\pi r^2 + \underline{2\,000}r$
  b) Después de escribir la función, haz clic en *Return*. Si no aparece nada en la pantalla es porque la gráfica de la función no está en el rango. Tienes que cambiar la escala de la ventana girando la pequeña rueda que aparece en la parte superior del ratón de la computadora.
  c) Si aparece una línea en la parte negativa, tienes que disminuir la escala y cambiar la posición de la ventana hasta que se alcance a ver de 400 a 800 unidades en el eje *y*.
  d) Con el *zoom* de acercamiento se puede ver una curva en la parte positiva del eje coordenado.
  e) Con el comando "Nuevo punto" se puede poner un punto en la parte inferior de la curva para estimar el valor de *x* cuando *y* es mínimo.

Reúnanse en equipos de dos o tres alumnos, comparen las gráficas obtenidas y su escala. Lleguen a acuerdos sobre las respuestas correctas. En caso de que lo consideren necesario pueden revisar los pasos que realizaron y corregir los posibles errores.

Variación cuadrática

La función que resulta del análisis del "Problema de investigación" está formada por dos partes: una que varía en forma cuadrática ($2\pi r^2$) y otra que varía de manera inversamente proporcional ($\frac{2000}{r}$). En esta lección sólo se estudia la variación cuadrática.

Variación cuadrática

Dadas las variables x y y, se dice que **y varía de forma cuadrática respecto a x** cuando cumplen la relación $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números cualesquiera y $a \neq 0$.

Caída libre de un cuerpo

La caída de un cuerpo que se suelta desde cierta altura hacia el suelo es uno de los fenómenos que llamaron la atención de los filósofos de la antigua Grecia. Al respecto, Aristóteles (384-322 a.n.e.) sostenía que la velocidad de un cuerpo que cae es proporcional al peso del objeto; esto expresaba la aparente idea natural de que si el peso de un objeto es grande cae más rápidamente que si el peso es menor, no obstante esta idea es falsa. Fue Galileo Galilei (1564-1642) quien la refutó con base en el diseño de ingeniosos experimentos y además encontró la fórmula precisa de la velocidad de los objetos en caída libre. Galileo introdujo, por primera vez, el concepto de aceleración, que es una cantidad que mide el cambio de velocidad. Observó que la distancia recorrida por un móvil variaba en una relación cuadrática respecto al tiempo.

Actividad 1. Formen equipos y hagan lo que se pide.

Problema. Un experimento consiste en soltar un objeto desde una altura de 300 m y medir la distancia que va recorriendo en los primeros 5 s.

a) Las tablas 5.3 y 5.4 representan dos relaciones. ¿Qué tabla corresponde a los resultados del experimento?

i)

Tabla 5.3 Relación entre el tiempo y la distancia recorrida por un objeto

t (s)	1	2	3	4	5
d (m)	9.8	19.6	29.4	39.2	49

ii)

Tabla 5.4 Relación entre el tiempo y la distancia recorrida por un objeto

t (s)	1	2	3	4	5
d (m)	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5

b) Argumenten y justifiquen por qué eligieron una u otra tabla.

c) Asocien las siguientes relaciones con alguna de las tablas del inciso *a* de manera que los datos de la tabla elegida se obtengan mediante la relación.

i) $d = 9.8t$ ii) $d = \frac{9.8t^2}{2}$ iii) $d = \frac{9.8 + t^2}{2}$

d) Establezcan qué relación representa la fórmula que describe la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre. Argumenten su respuesta.

e) Tracen en su cuaderno un plano cartesiano y grafiquen la función que describe la caída libre de un cuerpo.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas a los incisos anteriores. Justifiquen sus resultados mostrando los cálculos obtenidos.

Uso de las TIC

1. Consulta la siguiente página de internet en la que se abordan diversos aspectos del fenómeno de caída libre de un cuerpo: http://www.proyectosalonhogar.com/Enciclopedia_Ilustrada/Ciencias/Caida_Libre.htm (Consulta: 21 de marzo de 2013.)
2. Después de leer el artículo realiza lo que se pide.
   a) Busca en un diccionario el significado de los términos *rapidez* y *aceleración*.
   b) ¿Qué afirmaba Aristóteles acerca de la rapidez de un cuerpo que cae?
   c) De acuerdo con las ideas de Aristóteles, ¿cómo sería la fórmula de caída libre?
   d) ¿Qué afirmaba Galileo sobre la aceleración de un cuerpo que cae?
   e) ¿Cuál es la diferencia entre lo que afirmaban Aristóteles y Galileo respecto a la caída libre de un cuerpo?

Reúnanse en equipos y comparen sus respuestas. Para aclarar la diferencia entre rapidez (o velocidad) y aceleración, pueden consultar el bloque I de su libro de Ciencias II y pedir apoyo al maestro.

Problemas

En parejas, resuelvan los problemas que se plantean.

1. Se deja caer un objeto desde un avión que vuela a 1 000 m de altura. ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar al suelo?
2. Un objeto se deja caer desde una altura de 500 m y se desea conocer la distancia del objeto al suelo para diferentes valores de tiempo t.
   a) ¿Cuál es la expresión algebraica de la distancia d en función del tiempo t?
   b) Calculen la altura del objeto a los 3 s.
   c) Calculen en qué momento toca el suelo.

Reúnanse con otra pareja y comparen tanto sus respuestas como el procedimiento que siguieron. Si existen discrepancias, revisen y argumenten sus propuestas. Con la guía de su maestro lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Actividad 2. En equipos hagan lo que se pide y respondan las preguntas.

Problema. En una clase de biología, se lleva a cabo un experimento con ratas para determinar cuál es el efecto, en la ganancia de peso, de un alimento que consiste básicamente en una mezcla de levadura y harina de maíz. Al variar el porcentaje x de levadura en la mezcla, los estudiantes concluyeron que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata en un periodo dado se determina mediante la expresión $P(x)$:

$$P(x) = -\frac{1}{50}x^2 + 2x + 20, \qquad 0 \leq x \leq 100$$

a) ¿Cuál es el porcentaje de levadura en la mezcla con el que las ratas ganan mayor peso? Realicen lo siguiente para responder esta pregunta.

i) ¿Cómo completarían la tabla 5.5 con los diferentes pesos ganados por la rata para los valores de x?

Tabla 5.5 Porcentaje de levadura y ganancia de peso en el experimento

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$P(x)$									

b) Tracen en su cuaderno una gráfica con los pesos que gana la rata en función del porcentaje de levadura en la mezcla.

c) ¿Cuál es el porcentaje en la mezcla con el que la rata alcanza el mayor peso? ____________

Comparen con otro equipo los valores que obtuvieron en la tabla 5.5 y el bosquejo de la gráfica. ¿Obtuvieron la misma gráfica? Si hay contradicciones, verifiquen sus procedimientos.

Ecuaciones cuadráticas en fenómenos económicos

En el campo de la economía, es usual tratar de determinar ciertas relaciones entre variables de tipo económico; en particular, los **ingresos** de una empresa, los **artículos** que vende y su **precio** por artículo se relacionan en una ecuación como la siguiente:

Ingreso = precio de venta × núm. de artículos vendidos

La ley de la oferta y la demanda establece que el precio de un artículo varía de acuerdo con el número de artículos que hay en existencia en el mercado. Si no hay artículos en existencia, entonces se ofrece mucho por él; si hay muchos artículos, el precio disminuye hasta que prácticamente no valga nada.

Actividad 3. En equipos lean y respondan lo que se pide.

Problema. Cuando no hay determinado artículo en el mercado se ofrece \$1 400, pero cuando hay 350 o más artículos deja de tener valor.

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa el precio P del artículo (siendo x el número de artículos)? Justifiquen su respuesta.

i) $P = 1\,400 - 350x$ ii) $P = 350 - 4x$ iii) $P = 1\,400 - 4x$

b) Consideren artículos cuyo precio tiene como ecuación de oferta y demanda la respuesta del inciso *a*. Si todos los artículos en existencia se venden, ¿cuántos artículos se deben vender para obtener ingresos de \$12 000?

____

c) ¿Qué ecuación representa la solución al inciso *b*? Justifiquen su respuesta.

i) $4x^2 - 350x + 1400 = 0$ iii) $4x^2 - 1400x + 12\,000 = 0$

ii) $40x^2 - 350x + 12\,000 = 0$ iv) $x^2 - 35x + 1400 = 0$

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Con la guía de su maestro, lleguen a un acuerdo sobre la ecuación correcta y la justificación.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean. Escribe en tu cuaderno el procedimiento.

1. Supón que un objeto se deja caer desde un edificio y tarda 4 s en llegar al piso (considera que no hay fricción con el aire).

a) ¿Qué altura tiene el edificio? ____________

b) Traza la gráfica de tiempo contra distancia. ____________

2. En un experimento se observa que la cantidad x de carbohidratos en un alimento premium para conejos produce un efecto de aumento de peso dado por la ecuación $y = -\frac{1}{50}x^2 + 3x + 15$.

a) ¿Cuál es el porcentaje x de carbohidratos en el alimento premium con el cual los conejos ganan mayor peso? Para determinar el porcentaje de carbohidratos, efectúa lo siguiente:

i) Completa la tabla 5.6 con los diferentes pesos ganados por el conejo para los valores de x que se proponen.

Tabla 5.6 Porcentaje de carbohidratos y ganancia de peso en el experimento

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$P(x)$									

ii) Traza la gráfica con el peso que gana el conejo en función del porcentaje de carbohidratos en el alimento premium.

iii) ¿Cuál es el porcentaje de carbohidratos en el alimento con el que el conejo alcanza su mayor peso?

3. Una compañía vende al mes x unidades de un artículo a p pesos cada uno, donde la relación entre p y x (precio y número de artículos vendidos) está dada por la siguiente ecuación de demanda: $p = 3\,000 - 50x$. ¿Cuántos artículos se deben vender para obtener ingresos de \$40 000?

Reúnanse en parejas y comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan revisen sus procedimientos y argumenten sus propuestas. Si lo consideran necesario consulten al maestro.

Glosario

El concepto para agregar al glosario es:

Variación cuadrática de la variable y respecto a x

Lección 6

Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes

El alumno aprenderá a:
Conocer la escala de probabilidad. Analizar las características de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Problema de investigación

De manera individual haz lo que se pide.

- Ramón escucha en las noticias que para mañana hay 75% de probabilidad de lluvia y 50% de que no llueva.

a) ¿Consideras que lo que escuchó Ramón es cierto? Argumenta tu respuesta.

b) ¿La probabilidad de que llueva y de que no llueva debe sumar 100% o 125%?

c) Si la probabilidad de que llueva es de 75%, ¿entonces la probabilidad de que no llueva es de 25%? ______

¿Por qué? ______

En parejas, comparen sus respuestas y expongan con claridad las ideas matemáticas que las respaldan. En caso de discrepancias, lleguen a acuerdos sobre sus argumentos.

Escala de probabilidad

Actividad 1. Formen parejas y hagan lo que se pide en cada uno de los incisos.

Problema. En el lenguaje cotidiano empleamos frecuentemente términos que indican el grado de certeza de una afirmación. Lean los enunciados que se muestran en la tabla 6.1, cada uno representa un posible evento.

a) Analicen cada evento y utilicen los términos *seguro, imposible, muy probable, poco probable* e *igualmente probable* para escribir el grado de certeza o incertidumbre de la ocurrencia del evento. Usen un término diferente para cada enunciado.

Tabla 6.1 Diferentes enunciados y grado de certeza

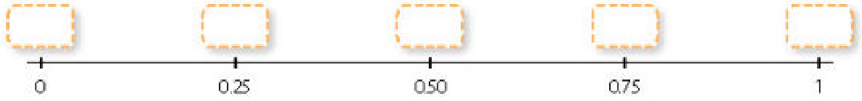
Evento	Grado de certeza
A: Existe vida en planetas donde no hay agua.	
B: Existe vida en otros planetas.	
C: Las condiciones climáticas de México se modifican debido al calentamiento global de la Tierra.	

Tabla 6.1 Diferentes enunciados y grado de certeza (*continuación*)

Evento	Grado de certeza
D: Mañana sale el sol.	
E: Dentro de los próximos 15 años habrá un terremoto en la ciudad de México.	

b) Escriban en la franja rosa los términos: *seguro, imposible, muy probable, poco probable, igualmente probable*. Ordénenlos —de izquierda a derecha— según expresen de menor a mayor certeza.

c) El intervalo de 0 a 1 de la recta numérica está dividido en cuatro partes. Escriban en los recuadros la letra de un evento de la tabla 6.1, de manera que sea razonable asignarle esa cantidad.



Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. ¿Hay una solución única o puede haber varias soluciones? Expliquen por qué. ______

Reflexionen ahora en las siguientes preguntas:
- Si un evento es imposible que ocurra, ¿habrá alguna probabilidad de que suceda?
- Si un evento es seguro que ocurra, ¿entonces su probabilidad es 100% $= \frac{100}{100} = 1$?

Problemas

En equipos, lleven a cabo lo que se solicita.

En una urna hay 12 bolas numeradas del 1 al 12. Supongan que se extrae una bola al azar y se observa el número que tiene.

a) Dados los eventos de la columna izquierda de la tabla 6.2, determinen el grado de certeza de cada evento escribiendo uno de los términos: *seguro, imposible, muy probable, poco probable, incierto*. Justifiquen cada una de sus respuestas.

Tabla 6.2 Eventos de la experiencia de sacar una bola de una urna con 12 bolas

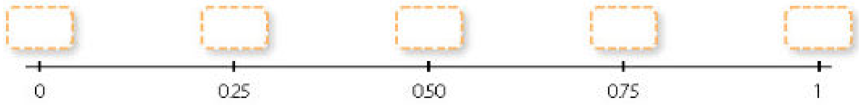
Evento	Grado de certeza
A: Obtener una bola mayor que 12.	
B: Obtener una bola menor o igual a 12.	
C: Obtener una bola menor o igual a 9.	
D: Obtener una bola menor o igual a 6.	
E: Obtener una bola menor o igual a 3.	

b) Calculen la probabilidad de cada uno de los eventos de la tabla 6.2. Consideren los casos favorables de cada evento y los casos posibles.

i) P(A) = ________ ii) P(B) = ________ iii) P(C) = ________

iv) P(D) = ________ v) P(E) = ________

c) Ubiquen en la recta cada uno de los eventos de la tabla 6.2 de acuerdo con su probabilidad.



Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. En el inciso c, ¿encontraron una solución única o varias soluciones? ¿Por qué? ________________________________

Reflexionen sobre esta pregunta:

• ¿Cuál es la relación entre las probabilidades y los valores de la recta que asignaron?

En una hoja aparte, escriban un evento distinto a los que aparecen en la tabla 6.2. Calculen su probabilidad y ubíquenlo en el intervalo de 0 a 1 de la recta numérica como la que se muestra en el inciso c. Después intercambien su hoja con otros compañeros, revísense los resultados y coméntenlos.

Eventos complementarios

Actividad 2. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado y observar el resultado.

a) Describe el espacio muestral U del experimento aleatorio:

U = {   }

b) Consideren los eventos A, B y C de la tabla 6.3. ¿Cómo completarían esta tabla escribiendo los elementos que hacen que cada uno de estos eventos no ocurra si se lanza un dado?

Tabla 6. 3 Eventos y elementos en que no ocurre un evento dado

Evento	No ocurre el evento cuando:
A: Sale un número par en el dado: 2, 4, 6.	A no ocurre cuando sale: ________________
B: Sale la cara 1 o la cara 6 en el dado.	B no ocurre cuando sale: ________________
C: Sale un número primo: 2, 3, 5.	C no ocurre cuando sale: ________________

c) Lean y comenten la definición del recuadro "Complemento de un evento". ¿Qué relación encuentran entre esta definición y lo que realizaron en la tabla 6.3? ________________

Complemento de un evento

El **evento complementario** de un evento A es otro evento A^c que ocurre siempre que A no ocurre.

d) Escriban un ejemplo de una experiencia aleatoria, dos eventos y sus complementarios.

____

Reúnanse con otra pareja e intercambien sus respuestas. Consideren lo que observaron en la actividad 2 y propongan una definición de eventos complementarios diferente a la que se da en el recuadro "Complemento de un evento", pero cuyo significado sea el mismo. Por otro lado, con la ayuda del maestro lleguen a un acuerdo sobre la corrección de los ejemplos planteados en el inciso *d*.

Eventos mutuamente excluyentes

Actividad 3. En equipos respondan lo que se pide.

Problema. En una urna se tienen 12 bolas numeradas del 1 al 12. Se extrae una bola y se observa el número.

a) En cada inciso se proponen dos eventos. Si los dos eventos pueden ocurrir a la vez, anoten una ✓ en *Ambos pueden ocurrir*; si siempre que ocurre uno el otro no ocurre, anoten una ✓ en *Sólo uno*. Para cada caso justifiquen su respuesta.

i) A: Obtener un número par. B: Obtener un número múltiplo de 3.

Ambos pueden ocurrir ________. Sólo uno ________.

¿Por qué? ________________________________

ii) K: Obtener un número par. L: Obtener un número impar.

Ambos pueden ocurrir ________. Sólo uno ________.

¿Por qué? ________________________________

iii) P: Obtener un número múltiplo de 3. Q: Obtener un número impar.

Ambos pueden ocurrir ________. Sólo uno ________.

¿Por qué? ________________________________

Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, si uno ocurre el otro no y viceversa.

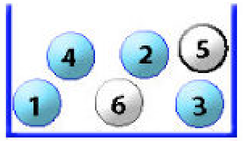
b) Con base en la información del recuadro "Eventos mutuamente excluyentes", indiquen qué parejas de eventos del inciso *a* están formadas por eventos mutuamente excluyentes.

Actividad 4. En equipos respondan las preguntas que se plantean.

Problema. En una urna hay seis bolas numeradas del 1 al 6 como se muestra en la figura 6.1. Las bolas 1, 2, 3 y 4 son de color azul, mientras que las bolas 5 y 6 son de color blanco. Se extrae una bola al azar y se observa su número y color.

Figura 6.1

Urna con seis bolas numeradas



a) Consideren los eventos y respondan "Sí" o "No" en cada inciso. Justifiquen sus respuestas.

i) ¿Los eventos "Sale bola azul" y "Sale bola blanca" son complementarios? ________. ¿Son mutuamente excluyentes? ________.

ii) ¿Los eventos "Sale bola blanca" y "Sale 3 y 6" son complementarios? ________. ¿Son mutuamente excluyentes? ________.

iii) ¿Los eventos "Sale 3 y 6" y "Sale 2, 4 y 6" son complementarios? ________. ¿Son mutuamente excluyentes? ________.

b) Propongan un par de eventos diferentes para cada inciso de manera que cumplan lo que se pide. Verifiquen su propuesta considerando las definiciones respectivas.

i) Que sean complementarios y mutuamente excluyentes.

____

ii) Que sean mutuamente excluyentes, pero no complementarios.

____

iii) Que no sean ni complementarios ni mutuamente excluyentes.

____

c) Para cada enunciado escriban una V si es verdadero y una F si es falso.

i) Los eventos mutuamente excluyentes son complementarios. ________.

ii) Los eventos complementarios son mutuamente excluyentes. ________.

iii) Los eventos complementarios no son mutuamente excluyentes. ________.

Expliquen la diferencia entre eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes:

____

____

Eventos independientes

Actividad 5. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema 1. Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado. Supongan que ocurre el evento "Cae águila". ¿Afectará este resultado la probabilidad del evento "Cae un punto" en el dado? ____________ ¿Por qué? ______________________________

Problema 2. Se lanza un dado. Supongan que ocurre el evento "Sale un número par". ¿Afectará este resultado la probabilidad del evento "Sale un múltiplo de 3"? ____________. ¿Por qué?

____

Al terminar comparen sus respuestas con las de otra pareja. Lleguen a un acuerdo sobre la justificación de cada pregunta.

Definición de eventos independientes

Para aclarar el sentido de la expresión "la ocurrencia de un evento afecta la probabilidad de otro", imaginen la situación de la actividad 4 (problema 2) en la que alguien apuesta por "Sale un número par". Entonces, el que apostó tiene una probabilidad de ganar (calcúlenla). Se lanza el dado y éste cae lejos de manera que el que apostó no puede ver lo que ocurrió, pero otra persona que está cerca sí puede ver el resultado del dado y le dice: "Ocurrió un múltiplo de 3". ¿Esta información vuelve mayor o menor la probabilidad de que gane? En caso de que aumente o disminuya la probabilidad del evento "Sale un número par", se dice que la ocurrencia del evento "Sale un múltiplo de 3" **afectó** la probabilidad del evento "Sale un número par". Por el contrario, si con dicha información se tiene la misma probabilidad de ganar, entonces se dice que la ocurrencia del evento "Sale un múltiplo de 3" **no afectó** la probabilidad del evento "Sale un número par". En este caso son eventos independientes. A partir de esta información se tiene la definición eventos independientes.

Eventos independientes

Se dice que dos eventos de una experiencia aleatoria son **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad del otro y viceversa.

Actividad 6. En equipos de tres alumnos lleven a cabo la siguiente actividad.

Problema. Se tienen 20 tarjetas: 4 con premio y 16 sin premio. Las tarjetas se meten en sobres rojos y azules (una tarjeta por cada sobre) y éstos, a su vez, se depositan en una tómbola. Después se elige un sobre al azar y de él se extrae su tarjeta.

a) En los sobres rojos se meten 2 tarjetas con premio y 10 sin premio. En los sobres azules se meten 2 tarjetas con premio y 6 sin premio. ¿Cómo completarían la tabla 6.4? En la columna y la fila anaranjadas se muestran los totales (la suma de las filas o la suma de las columnas).

Tabla 6.4 Tarjetas premiadas y sin premio en los sobres

	Rojos	Azules	
Con premio			4
Sin premio			16
Total			20

b) Con base en la tabla 6.4, respondan:

i) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un premio al sacar un sobre y ver la tarjeta que está adentro? ______________________________

____

ii) Supongan que sacan un sobre rojo. ¿Cuál es la probabilidad de obtener premio?

____

iii) ¿El evento "Sacar sobre rojo" afecta la probabilidad del evento "Obtener premio"? ____________ ¿Cómo son los eventos "Sacar sobre rojo" y "Obtener premio"?

____

c) Escriban en la tabla 6.5 la siguiente distribución: en los sobres rojos se colocan 3 tarjetas con premio y 9 sin premio; en los sobres azules se coloca 1 tarjeta con premio y 3 sin premio.

Tabla 6.5 Tarjetas premiadas y sin premio en los sobres

	Rojos	Azules	
Con premio			4
Sin premio			16
			20

d) A partir de los resultados de la tabla 6.5, respondan las preguntas del inciso *b*.

Comenten con otro equipo en cuál de los anteriores casos los eventos "Color de sobre rojo" y "Obtener premio" son independientes y en cuál no. Con ayuda del maestro lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Diferencia entre eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes

Actividad 7. En equipos respondan lo que se solicita.

En una urna hay seis bolas numeradas del 1 al 6 como se muestra en la figura 6.2. Las bolas 1, 2, 3 y 4 son de color rojo, mientras que las bolas 5 y 6 son de color verde. Se extrae una bola al azar y se observa su número y color.

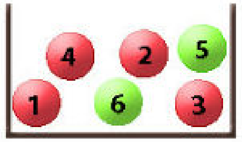


Figura 6.1

Urna con seis bolas numeradas

a) Escriban "Sí" o "No" para cada uno de los eventos. Justifiquen sus respuestas.

i) ¿Los eventos "Sale bola roja" y "Sale bola verde" son independientes? ________. ¿Son mutuamente excluyentes? ________.

ii) ¿Los eventos "Sale bola verde" y "Sale 3 y 6" son independientes? ________. ¿Son mutuamente excluyentes? ________.

iii) ¿Los eventos "Sale 3 y 6" y "Sale 2, 4 y 6", son independientes?________ ¿Son mutuamente excluyentes? ________

b) Escriban un par de eventos diferentes para cada inciso de manera que cumplan lo que se pide; consideren las definiciones respectivas.

i) Que sean independientes y mutuamente excluyentes.

____

ii) Que sean mutuamente excluyentes, pero no independientes.

____

iii) Que no sean ni independientes ni mutuamente excluyentes.

____

c) Escriban para cada enunciado una V si es verdadero y una F si es falso.

i) Los eventos independientes son mutuamente excluyentes. ________.

ii) Los eventos independientes no son mutuamente excluyentes. ________.

iii) Los eventos mutuamente excluyentes son independientes. ________.

Expliquen la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes:

____

____

Repasa lo aprendido

Resuelve con un compañero los problemas en tu cuaderno. Al finalizar organícense para trabajar en el pizarrón y con todo el grupo encuentren los posibles errores.

1. Supongan que se lanza un dado.

a) Encuentren las probabilidades de los siguientes eventos:

i) F: Sale el número 8. P(F) = ________

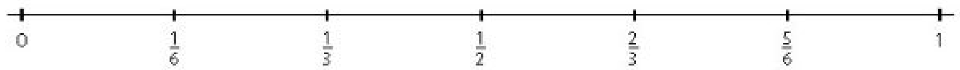
ii) G: Sale un número par. P(G) = ________

iii) H: Sale un número menor o igual que 2. P(H) = ________

iv) I: Sale un número menor o igual que 6. P(I) = ________

v) J: Sale un número menor o igual a 4. P(F) = ________

b) Ubiquen las probabilidades de cada evento en la siguiente recta del intervalo de 0 a 1.



2. Una ruleta como la que se muestra en la figura 6.1 tiene ocho sectores donde puede caer una bolita que se lanza cuando la ruleta está girando. En el momento que se detiene, se observa en qué sector queda la bolita. La probabilidad de que la bolita caiga en cualquiera de los ocho sectores es la misma.

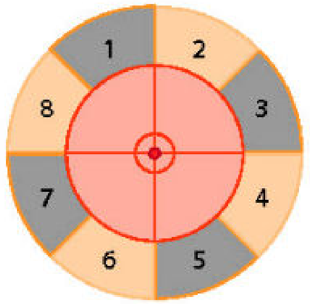


Figura 6.1

Ruleta con ocho sectores

Completen la tabla 6.6 indicando para cada pareja de eventos si son mutuamente excluyentes o no. Justifiquen su respuesta en cada caso.

Tabla 6.6 Comparación de eventos

Evento	¿Son mutuamente excluyentes?
P : La bolita cae en una celda par. I : La bolita cae en una celda impar.	
P : La bolita cae en una celda par. A : La bolita cae en una celda gris.	
I : La bolita cae en una celda impar. B : La bolita cae en una celda anaranjada.	
A : La bolita cae en una celda gris. B : La bolita cae en una celda anaranjada.	

3. En una encuesta se eligieron 100 personas al azar. Se les preguntó su nacionalidad (mexicana o no) y su sexo. Los resultados obtenidos fueron: 90 son de nacionalidad mexicana, de los cuales 40 son hombres y 50 mujeres; mientras que, de los 10 que no son mexicanos, 7 fueron hombres y 3 mujeres.

a) ¿El evento "Ser de nacionalidad mexicana" afecta la probabilidad del evento "Ser hombre"? ________.

¿Por qué? ________________________________

b) Escriban una explicación de lo que significa que el evento "Ser de nacionalidad mexicana" afecta la probabilidad del evento "Ser hombre" de manera análoga a la explicación del inciso *a*.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Eventos complementarios **Eventos mutuamente excluyentes** **Eventos independientes**

Lección 7 Población y muestra

El alumno aprenderá a:
Diseñar una encuesta o un experimento e identificar la población en estudio. Discutir sobre las formas de elegir el muestreo. Obtener datos de una muestra y buscar herramientas convenientes para su presentación.

Problema de investigación

Lee la situación que se plantea y responde las preguntas.

- En un programa de televisión, un comentarista se refiere a una investigación de la siguiente manera: "Los hábitos de estudio de una muestra de estudiantes de secundaria revelan que…".
  - a) ¿Qué significa en este enunciado la palabra *muestra*? ____________
  - b) Escribe las razones por las que los investigadores utilizaron una muestra de estudiantes de secundaria en lugar de estudiar a todos los estudiantes. ____________

¿Qué es una población?

Actividad 1. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema 1. En la tabla 7.1 relacionen con una línea la disciplina científica con la definición de población que se utiliza en ella. (Si tienen dudas, consulten un diccionario o una página de internet.)

Tabla 7.1 Disciplinas científicas y poblaciones que estudian

Disciplina científica	Definición de población
Demografía	Conjunto de individuos de la misma especie que ocupan una misma área geográfica.
Ecología	Conjunto de individuos o cosas sometidos a un estudio mediante el examen de la totalidad o una parte del conjunto.
Estadística	Conjunto de personas que habitan un pueblo, una ciudad, un país o la Tierra.

Problema 2. Escriban la definición de población en estadística.

En estadística, una población es… ____________

Reúnanse con otras parejas y comparen sus respuestas. Comenten las diferencias de cada definición y, con la ayuda de su maestro, lleguen a un acuerdo sobre la definición más adecuada.

¿Qué es una muestra?

La palabra *muestra* tiene diferentes significados, el que se quiere resaltar en esta lección es, desde luego, el significado en estadística. En los problemas de la actividad 2 se verán algunos de estos significados.

Actividad 2. Formen equipos y efectúen lo siguiente.

Problema 1. Anoten lo que entienden por muestra y escriban una frase en la que utilicen esta palabra en su sentido estadístico. ____________

Problema 2. En un equipo de estudiantes se planteó la pregunta: "¿Qué se entiende por muestra?" Éstas fueron algunas de las respuestas y los contextos en que se usa.

- Una porción pequeña de un producto comercial: "Una muestra de perfume".
- Una exposición de arte: "Una muestra de la obra pictórica de Leonora Carrington".
- Parte de una población en estudio: "Se eligió una muestra de estudiantes de tercer grado de secundaria para que participaran en el estudio".
- Exhibir o revelar algo: "El director técnico del Madrid, José Mourinho, muestra siempre a la prensa su lado menos afable".

¿Cuál de las definiciones se acerca mejor al significado de muestra en estadística? Argumenten su respuesta. ____________

Reúnanse con otros equipos y comparen sus respuestas. Lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas, después, con la guía de su maestro, verifíquenlas.

Escriban otra oración en la que la palabra *muestra* tenga el significado que se le da en estadística. ____________

Estudios estadísticos

Para obtener información o conocimiento acerca de las características de una población se suelen hacer estudios estadísticos. En la actividad 3 deberán llevar a cabo un pequeño estudio.

Actividad 3. Formen equipos y hagan lo que se pide.

Problema 1. Formulen dos o tres preguntas para conocer algunas características que ignoren sobre los estudiantes de su escuela:

- ____________
- ____________
- ____________

Problema 2. Supongan que tienen la posibilidad de plantear las preguntas del problema 1 a cualquier estudiante de su escuela y registrar las respuestas. Preguntarles a todos los estudiantes podría consumir demasiados recursos (tiempo, dinero y esfuerzo).

a) ¿Qué pueden hacer para obtener información valiosa sobre las preguntas formuladas sin gastar demasiados recursos? ______

b) Diseñen un plan para obtener información y responder las preguntas. Consideren que deben utilizar el mínimo de recursos.

c) Lleven a cabo el plan y registren los datos pertinentes.

d) Organicen los datos obtenidos en una tabla y obtengan números resumen (por ejemplo, en los casos numéricos: porcentajes, media, rango, moda).

e) Analicen y determinen cuál es la población de su estudio y cuál es la muestra.

f) Escriban un informe dirigido a personas que no sean de su salón. En el informe aclaren cuál es la población y cómo eligieron la muestra.

Reúnanse con otro equipo e intercambien sus informes. Con la guía de su maestro, comenten sobre la pertinencia de los estudios y el análisis del trabajo de los equipos del grupo.

Actividad 4. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. En el equipo de Rebeca, Susana y Antonio formularon la pregunta: "¿Cuántos hermanos tiene cada estudiante de la escuela?" Para no tardar demasiado tiempo en averiguarlo decidieron formular la pregunta a 20 estudiantes de la escuela. Al preguntarles cómo los elegirían, propusieron métodos diferentes:

- Método de Rebeca: Preguntarles a 20 compañeros del grupo.
- Método de Susana: Depositar en una urna tarjetas con el nombre de cada uno de los estudiantes de la escuela. Revolver bien todas las tarjetas y sacar 20 al azar. Luego buscar a los estudiantes y hacerles la pregunta.
- Método de Antonio: Pararse afuera de la biblioteca y plantearles la pregunta a todos aquellos que lleguen hasta completar los 20.

a) ¿Cuál de estos procedimientos es más apropiado para obtener una muestra lo más representativa posible de todos los estudiantes de la escuela? Expliquen su respuesta. ______

b) Escojan alguno de los métodos, hagan la encuesta y escriban en la tabla 7.2 los resultados que obtuvieron.

Tabla 7.2 Resultados de la encuesta a 20 estudiantes ("¿Cuántos hermanos tienes?")

i) Tracen en su cuaderno una gráfica que represente adecuadamente los datos obtenidos.

ii) ¿Cuál es la media aritmética de los datos? ______

Comparen sus respuestas y gráficas con las de otra pareja. Comenten si la gráfica que eligieron representa mejor la información o debería ser otro tipo de gráfica.

¿Qué pueden decir acerca del número de hermanos en las familias de todos los estudiantes de la escuela? Realicen en su cuaderno un informe.

Población y muestra

Población y muestra

Se llama **población** a un conjunto de individuos o cosas (o características de ellos) sometidos a un estudio; una **muestra** es una parte de la población.

Una investigación surge cuando se quiere conocer alguna información sobre una población; para ello se formulan preguntas sobre las características que se desea conocer. Por lo regular, no es posible o viable hacer el estudio sobre toda la población y se elige hacerlo sobre una muestra. La intención es generalizar a toda la población la información obtenida al investigar la muestra; a dicha generalización se le llama inferencia.

Inferencia

Una **inferencia** es el proceso de conocer características de una población a través del estudio de una muestra. El grado de certeza de la inferencia depende de las características de la muestra.

Actividad 5. Formen equipos y respondan las preguntas que se plantean.

Problema. Se quiere conocer el porcentaje de estudiantes de la escuela que tienen mascota (perro, gato, hámster, etcétera).

a) ¿Cuál es la población? ______

b) Escriban la pregunta de la investigación. ______

c) Si el total de alumnos de la escuela es 300.

i) ¿Cuál de las siguientes propuestas sobre el tamaño de la muestra es más conveniente para hacer el estudio?

- Propuesta de Lorena: El tamaño de la muestra debe ser de 10.
- Propuesta de María: El tamaño de la muestra debe ser de 60.
- Propuesta de Néstor: El tamaño de la muestra debe ser de 300, es decir, la totalidad de los estudiantes de la escuela.

ii) Decidan cuál es la propuesta más conveniente y expliquen por qué. ______

d) Después de elegir el tamaño de la muestra, Lorena, María y Néstor analizaron la forma de realizarla. A continuación, se presentan las propuestas de cada quien.

- Propuesta de Lorena: Colocar en una caja tarjetas con el nombre de todos los alumnos y extraer al azar las tarjetas de los alumnos a quienes se entrevistará.
- Propuesta de María: Elegir la muestra de los estudiantes de su propio grupo y entrevistarlos.
- Propuesta de Néstor: Pararse afuera de la biblioteca y entrevistar a los que salgan o entren hasta completar el número convenido.

iii) Elijan la propuesta más conveniente de las tres y escriban las razones de su elección.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Muestra

Muestra representativa

Una muestra es **representativa** cuando la información que contiene es similar a la de toda la población. Aunque no puede saberse con certeza cuándo una muestra es representativa, hay dos criterios que permiten tomar decisiones para elegir la más representativa:

i) Una muestra más grande generalmente es más representativa que otra más pequeña.

ii) Una muestra aleatoria (es decir, elegida al azar) generalmente es más representativa que otra que no se ha elegido al azar.

Las muestras aleatorias son las que se utilizan en los análisis estadísticos; se definen como se muestra en el recuadro siguiente.

Muestra aleatoria

Una muestra es **aleatoria** cuando se elige de manera que cualquier miembro de la población tiene la misma probabilidad de quedar en la muestra.

Muchas veces no es posible elegir una muestra aleatoria o bien resulta muy costoso obtenerla. En lugar de renunciar a hacer la investigación por no contar con la muestra aleatoria, una rama de la estadística —llamada análisis exploratorio de datos— propone que es posible hacer investigaciones con muestras no aleatorias. En este caso, el investigador debe actuar como un detective que trata de obtener toda la información posible de los datos con los que se cuente. Para estos escenarios tiene sentido considerar otros dos tipos de muestra.

Tipos de muestra

Una muestra es **forzada** cuando no se tiene opción de elegir.

Una muestra es **por conveniencia** cuando se elige aprovechando alguna facilidad para obtenerla.

Problemas

De manera individual, responde las preguntas.

En los siguientes estudios se ofrece una descripción breve de la muestra. Indica de qué tipo de muestra se trata: aleatoria, forzada o por conveniencia.

a) Se está llevando a cabo un estudio con los enfermos de enfisema pulmonar que se tratan actualmente en el Hospital Dr. Gaudencio González Garza (conocido como La Raza), para conocer más sobre los orígenes de dicha enfermedad. El tipo de muestra es __________.

b) En el combate contra la delincuencia, se estudia la manera en que operaban las bandas capturadas con el fin de apresar a otras bandas y recoger evidencias de sus actos delictivos. El tipo de muestra es __________.

c) Para la aplicación de la prueba Excale se eligen al azar escuelas de la república mexicana. El tipo de muestra es __________.

Reúnete con otro compañero y contrasten sus resultados con la información del recuadro "Tipos de muestra". Si hay discrepancia en las respuestas, lean juntos de nuevo el recuadro y lleguen a un acuerdo. Si lo consideran necesario, soliciten la guía de su maestro.

Características de un informe de investigación

Las investigaciones estadísticas no sólo tienen el propósito de obtener información para satisfacer una inquietud o responder a una pregunta, en muchos casos su objetivo también es proporcionar información a otros que pueden estar interesados en el tema. Una gran parte de nuestro conocimiento no lo investigamos por nuestra propia cuenta, sino que aprovechamos la información que divulgan otros investigadores. Por esta razón, es muy importante saber hacer un informe de investigación.

Los informes de investigación regularmente son breves, precisos y contienen al menos los siguientes elementos:

- El título de la investigación y una introducción que explique lo que se quiere responder.
- El tamaño de la muestra y la manera en que se eligió o bien el censo del que se obtuvieron los datos.
- Una gráfica de los datos y números resumen como el porcentaje, la media, etcétera.
- Una conclusión o inferencia.

Problemas

En equipos, lleven a cabo la tarea que se pide.

Escriban un informe de investigación que contenga los elementos señalados en "Características de un informe de investigación" con los datos de la actividad 5.

Uso de las TIC

- Formen equipos y abran la siguiente página para revisar algunos informes de investigación.

http://cuentame.inegi.org.mx/ (Consulta: 25 de marzo de 2013.)

En esta página podrán encontrar datos sobre tres grandes temas relacionados con nuestro país:

- Territorio
- Población
- Economía

Busquen la información en la página para responder lo siguiente:

a) ¿Cuánto mide la superficie territorial de México? ____________________

b) ¿Cuánto mide su superficie marítima? ____________________

c) Formulen tres preguntas sobre el tema de población y respondan con los datos proporcionados en la página de internet.

d) ¿En qué se basan las respuestas a las preguntas que formularon: en la población o en una muestra? ____________________

____

e) Hagan lo mismo que en el inciso c para el tema de economía.

Reúnanse con otro equipo e intercambien sus preguntas y la información que obtuvieron. Comenten cómo se aplican los conceptos de muestra y población en la información que respondió a sus preguntas respectivas. En caso de dudas, consulten a su maestro.

Repasa lo aprendido

En equipos deberán hacer lo que se pide.

Las siguientes preguntas corresponden a temas de una investigación cuya población son los alumnos de su escuela.

- ¿Cuál es la edad de los padres de los alumnos de la escuela?
- Consideren a todos los alumnos de su escuela. ¿Qué tan lejos de su casa les queda la escuela?
- Consideren a todos los alumnos de su escuela. ¿Cuánto tiempo hacen de su casa a la escuela?
- ¿Cuántos estudiantes nacieron en el estado en el que se ubica la escuela?
- ¿Cuántos papás de los estudiantes nacieron en el estado donde se ubica la escuela?

a) Elijan un tema para investigar.

b) Formulen la pregunta o las preguntas que deben hacer para obtener la información pertinente al tema elegido.

c) Definan una muestra adecuada y expliquen las razones que usan para determinarla.

d) Hagan la encuesta para la muestra elegida.

e) Procesen los datos obtenidos y preséntenlos de manera conveniente.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Población **Muestra** **Encuesta**

Evaluación

Lee cada situación y elige la respuesta correcta.

Situación 1. En un terreno rectangular se construyó un parque recreativo. El terreno está dividido por una diagonal en dos triángulos rectángulos iguales. En un triángulo se sembró pasto para las personas que desean hacer un día de campo, mientras que la otra mitad lleva tierra y adoquines, y se construyeron canchas y pistas de patinaje. Si el largo del terreno es igual al ancho más 5 m y el área total de la zona con pasto es de 6325 m.

1. ¿Con qué expresión algebraica se encuentran las dimensiones, largo y ancho, del terreno rectangular?

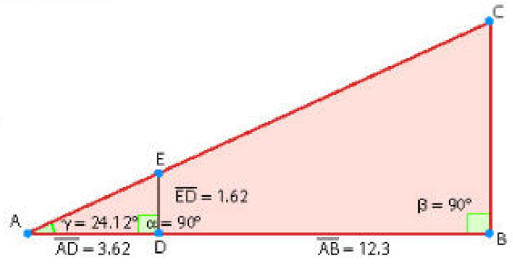
a) $x(x+5) = 6325$ b) $x^2 + 5 = 6325$ c) $x(x+5) = 12650$ d) $x^2 + 5 = 12650$ — a b c d

2. ¿Qué pareja de números representa el largo y el ancho del terreno rectangular?

a) 112.45, 117.45 b) 110, 115 c) 79.5, 84.5 d) 77.1 y 82.1 — a b c d

Situación 2. En figura E1.1, el segmento $\overline{DE}$ representa la altura de Raúl y el segmento $\overline{BC}$ es la altura de un poste de luz.

Figura E1.1



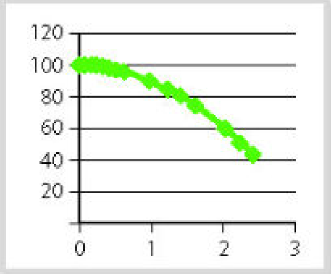
3. ¿Qué criterio de semejanza se aplica para calcular la altura del poste?

a) LLL b) LAL c) AAA d) ALA — a b c d

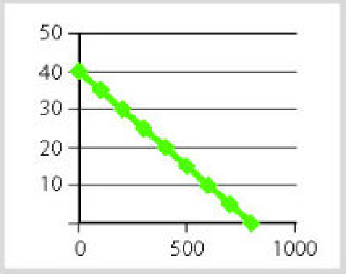
4. ¿Cuál es la altura del poste?

a) 5.50 m b) 8.68 m c) 10.68 d) 14.06 — a b c d

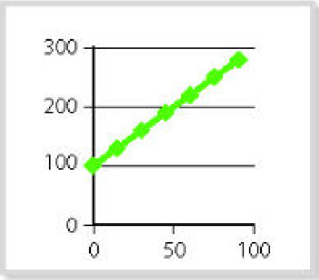
Situación 3. Después de una clase de matemáticas, en el pizarrón quedaron dibujadas las gráficas E1.1, E1. 2, E1. 3 y E1. 4.



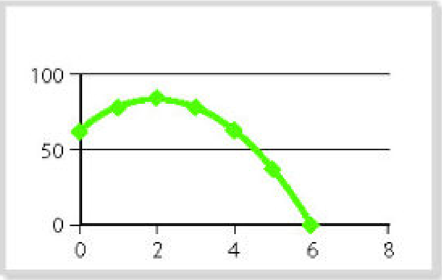
Gráfica E1.1



Gráfica E1.2



Gráfica E1.3



Gráfica E1.4

5. Escribe el número de gráfica que corresponde a cada enunciado.

   a) Luis viaja en su automóvil, se detiene a descansar después de recorrer dos quintas partes de su viaje. Posteriormente, viaja a velocidad contaste hasta llegar a su destino. Gráfica: ________

   b) Un avión deja caer un proyectil en caída libre desde cierta altura. Gráfica: ________

   c) Desde una ventana en un edificio se arroja una piedra hacia arriba con cierta velocidad, la piedra sube hasta una altura máxima y desciende hasta estrellarse contra el suelo. Gráfica: ________

   d) Un automóvil con capacidad de 40 ℓ en su tanque de gasolina gasta 5 ℓ cada 100 km. Gráfica: ________

Situación 4. En una urna se colocan seis bolas idénticas numeradas del uno al seis.

6. Con base en el experimento de sacar una bola, escribe en el paréntesis una V si la afirmación es verdadera o una F si es falsa.

   a) La probabilidad de sacar una bola y obtener un siete es negativa porque no hay ninguna bola con ese número. (   )

   b) La probabilidad de extraer una bola con número impar es la misma que la de extraer una bola con un número par. (   )

   c) La probabilidad de que la bola que salga sea un número menor que 10 es infinita, porque todas las bolas cumplen ese requisito. (   )

   d) Los eventos A: Extraer una bola con un número menor o igual que dos y B: Extraer una bola con un número múltiplo de tres son excluyentes. (   )

   e) Los eventos A: Extraer una bola con un número par y B: Extraer una bola con número impar son complementarios. (   )

7. Escribe en los paréntesis una I si los eventos son independientes o NI si no lo son.

   a) A: La bola extraída tiene un número par y B: La bola extraída tiene un número menor que cuatro. (   )

   b) C: La bola tiene un número del uno al seis y D: La bola tiene un número impar. (   )

   c) E: La bola tiene un número impar distinto de tres y F: La bola tiene un número par mayor que tres o el número uno. (   )

Bloque 2

La fuerza con que se lanza un cohete espacial o un misil se describe mediante una función cuadrática.

Un vistazo

En este bloque estudiarás la factorización de polinomios de segundo grado aplicada en la solución de ecuaciones cuadráticas. La factorización es una técnica fundamental en la búsqueda de una fórmula general para la solución de ecuaciones de segundo grado. En geometría estudiarás la rotación, la traslación y sus propiedades, que forman parte de las transformaciones rígidas. Posteriormente, verás cómo se utilizan estas transformaciones para hacer diseños visualmente estéticos. Se continúa con el estudio del teorema de Pitágoras, el cual es muy atractivo y útil, como lo manifiesta el hecho de que desde la antigüedad atrajo la atención de los matemáticos. Por último, se introduce la regla de la suma de probabilidades que, junto con la independencia de eventos, constituye la base de la operatividad de las probabilidades.

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

El alumno aprenderá a:

Usar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Lección 8 Ecuaciones cuadráticas y factorización

Problema de investigación

De manera individual resuelve el problema que se plantea.

- La suma de dos números enteros es 19 y su producto es 60. ¿Cuáles son esos números?

a) Encuentra todas las parejas de números cuyo producto sea igual a 60. ______

______

b) De las parejas que encontraste, encierra en un círculo la que sume 19. ______

______

c) ¿Qué relación existe entre las soluciones del problema y la ecuación $x^2 - 19x + 60 = 0$?

______

En parejas, comparen sus respuestas. Si tienen dudas o diferencias continúen con el estudio de la lección y después vuelvan a responder estas preguntas.

Ecuaciones cuadráticas

Actividad 1. Formen equipos de tres estudiantes y resuelvan lo que se pide.

Problema. Para cercar un jardín rectangular se utilizaron 136 m de malla ciclónica. Si el área del jardín mide 1 035 m², ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

a) Tracen un dibujo de la situación planteada.

b) Resuelvan en su cuaderno el problema con los recursos que consideren convenientes (pueden usar calculadora).

Al finalizar, reúnanse con otras parejas y comparen su procedimiento; puede ser que algunas parejas hayan llegado a la solución y otras no. Distingan los métodos aritméticos (por ensayo y error) de los métodos algebraicos (mediante el planteamiento de una o dos ecuaciones). Revisen que los resultados numéricos tengan sentido en el contexto del problema.

En caso de que ningún equipo haya optado por el método algebraico, háganlo y realicen las operaciones necesarias para obtener una ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$. Reúnanse en plenaria y expongan tanto la solución como el método que evaluaron más adecuado para llegar a la ecuación cuadrática y su solución.

Factorizar una ecuación cuadrática

Actividad 2. En parejas, realicen la siguiente actividad.

Problema. ¿El polinomio $x^2 - 18x + 77$ puede expresarse como el producto de dos binomios? En caso de que lo consideren posible, ¿cuál es la expresión?

a) Resuelvan el problema y escriban el procedimiento que realizaron. ______

______

b) Hallen un método igualando el polinomio a la expresión $(x + a)(x + b)$. ¿Qué condiciones deben satisfacer a y b para que encuentren los valores? ______

______

Reúnase con otras parejas y comparen sus respuestas. Verifiquen que con el método propuesto también pueda resolverse el problema planteado en la actividad 1. Con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Precisión de terminología

Es conveniente precisar la terminología que se utiliza en los problemas de factorización de ecuaciones cuadráticas.

Solución de una ecuación cuadrática

Se llama **solución de una ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$ (donde $a \neq 0$) a un número x_0 tal que satisface la ecuación, es decir, al sustituir x_0 se tiene que $a(x_0)^2 + b(x_0) + c = 0$.

Por ejemplo, el número $x_0 = 2$ es solución de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$. La manera en que puede comprobarse es sustituyendo el número en la ecuación y verificando que el resultado obtenido sea igual a cero. Realiza la sustitución en tu cuaderno y verifícalo.

Factorizar un número entero significa expresarlo como el producto de factores enteros. Por ejemplo, una factorización de 18 es 6×3, dos factorizaciones de 28 son 7×4 y 14×2.

Factorizar un polinomio de segundo grado es expresarlo como el producto de dos binomios. En el recuadro de la página 72 se define la factorización en los enteros para un tipo especial de polinomio, aquellos en los que el coeficiente de la literal elevada al cuadrado es 1.

Factorización

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ puede factorizarse en enteros si es posible encontrar dos números enteros A y B, tales que $x^2 + bx + c = (x + A)(x + B)$.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 18x + 77 = 0$ es factorizable en enteros, porque se pueden encontrar dos números A y B tales que cumplen con la igualdad. Encuentra los valores.

Un resultado importante que liga la noción de raíz de una ecuación con su factorización es el siguiente:

Soluciones de una ecuación

Si x_1 y x_2 son soluciones enteras de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ (donde $a \neq 0$), entonces esta ecuación es factorizable y se expresa de la siguiente forma:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Problemas

Formen equipos de tres alumnos y resuelvan los problemas.

1. Escriban una ecuación utilizando la información del recuadro "Soluciones de una ecuación" si las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$.
2. Para la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$.
   a) Comprueben que $x = 2$ es una solución. Verifiquen que se cumple lo siguiente: $2^2 + 3(2) - 10 = 0$.
   b) Verifiquen que $x_2 = -5$ es otra solución de la ecuación.
   c) Expresen la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$ como el producto de dos binomios.
3. Para el siguiente par de problemas, planteen la ecuación y resuélvanla por factorización.
   a) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un pasillo de adoquín. Encuentren el ancho del pasillo si su área mide 540 m².
   b) Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

Reúnanse con otros equipos y comparen sus resultados. ¿Coinciden? Si no, revisen y argumenten las respuestas hasta llegar a un acuerdo. Si utilizaron varios procedimientos, determinen cuál de ellos les parece más eficaz.

Verifiquen que las ecuaciones que encontraron en el ejercicio 3 puedan expresarse como soluciones de una ecuación. En caso de que lo consideren necesario revisen el recuadro de dicha definición.

Actividad 3. En parejas, resuelvan el problema.

Problema. En un *lobby* rectangular su longitud es 5 m mayor que su ancho. Si el área del piso del *lobby* es de 150 m², ¿cuánto miden el largo y el ancho?

a) Hagan un dibujo para representar la situación.

b) Formulen la ecuación que expresa las condiciones del problema. ______________________

____

c) Resuélvanla por factorización en su cuaderno.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Ofrezcan procedimientos para comprobar que la respuesta es correcta y discutan si la solución propuesta es congruente con el contexto del problema.

Actividad 4. Formen parejas y resuelvan el siguiente problema.

Problema. Un cateto de un triángulo rectángulo es 17 cm mayor que el otro cateto y la hipotenusa mide 25 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?

a) Dibujen en su cuaderno la situación descrita.

b) Formulen la ecuación que modela el problema.

c) Escriban la ecuación del inciso *b* de la forma $x^2 + bx + c = 0$.

d) Resuelvan el problema mediante factorización.

Reúnanse con otras parejas y comparen tanto los procedimientos como las soluciones. Escriban y comenten un procedimiento para comprobar que la solución sea correcta.

Actividad 5. En equipos, resuelvan el siguiente problema.

Problema. Un tren viaja a velocidad constante y recorre 300 km. Si la velocidad hubiera sido $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mayor el tiempo empleado habría disminuido una hora. Calculen la velocidad del tren.

Consideren que la velocidad media se define como el cociente de la distancia entre el tiempo. De esta relación se deriva la ecuación del tiempo en función de la distancia y la velocidad.

$$v = \frac{d}{t}, \text{ de donde } t = \frac{d}{v}$$

a) Con base en lo anterior, encuentren las siguientes expresiones:

i) El tiempo necesario del viaje a la velocidad original. ______________________

ii) El tiempo necesario del viaje a la velocidad aumentada. ______________________

b) Formulen la ecuación que expresa las relaciones en el problema. ______________________

c) Expresen la ecuación del inciso *b* de la forma $x^2 + bx + c = 0$. Resuélvanla por factorización.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Vuelvan al enunciado del problema y comenten el significado del resultado en el contexto donde se formula la pregunta. Por ejemplo, propongan ideas como: "Cuando la velocidad es mayor, el tiempo es menor". ¿Esto coincide con los resultados que obtuvieron?

Propiedades de números enteros

En las ecuaciones cuadráticas y la factorización se sugieren propiedades generales de los números enteros. A continuación, se propone la relación entre una propiedad y su expresión algebraica.

Actividad 6. Individualmente, lee y responde lo que se pide.

Problema. Un número más su cuadrado se puede escribir como el producto de dos números sucesivos. Por ejemplo:

- $5 + 25 = 5 \times 6$
- $6 + 36 = 6 \times 7$
- $7 + 49 = 7 \times 8$

a) Escribe la expresión algebraica de la relación "Un número más su cuadrado". ______________________

____

b) ¿Cuál es la factorización del número que obtuvieron en la expresión? ______________________

____

Reúnete con otros compañeros y analicen cómo y por qué la expresión algebraica obtenida se traduce en una propiedad de los números enteros.

Problemas

En equipos de tres alumnos, resuelvan los problemas.

1. Lean y den ejemplos que satisfagan la siguiente propiedad de los números enteros: "Cualquier número cuadrado disminuido en una unidad se puede escribir como el producto de dos números cuya diferencia es 2, es decir, puede escribirse como el producto de dos pares sucesivos o el producto de dos impares sucesivos".
2. Escriban una ecuación cuadrática que exprese la propiedad de los números enteros.

Reúnanse con otros equipos y contrasten sus procedimientos y resultados. Comenten la posibilidad de encontrar otras propiedades de enteros cuando se opera con polinomios cuadráticos.

Repasa lo aprendido

De manera individual haz en tu cuaderno lo siguiente.

1. Factoriza el lado izquierdo de la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$ y encuentra las soluciones.
   a) Encuentra dos números enteros *a* y *b* tales que $a + b = -3$ y $ab = -10$.
   b) Revisa las parejas de números enteros cuyo producto sea igual a -10 y encuentra una cuya suma sea igual a -3.
   c) Si existe dicha pareja, entonces la ecuación es factorizable y puede escribirse de la forma $(x - a)(x - b)$. (Observa la leyes de los signos, si una de las constantes tiene signo menos (–) se convertirá en más (+) en la factorización.)
2. Un estacionamiento rectangular de 40 m por 60 m está rodeado por una callejuela de ancho uniforme, cuya área es igual a la del estacionamiento. Encuentra el ancho de la callejuela.
   a) Haz un dibujo que represente la situación del problema e identifica la incógnita.
   b) Formula la ecuación que modela el problema y llévala a la forma $x^2 + bx + c = 0$.
   c) Resuelvan la ecuación por factorización.
   d) Analicen la situación en el contexto del problema.
3. Varios estudiantes se reunieron para salir de excursión; el costo fue de \$440. Al salir se sumaron dos estudiantes más a la excursión, lo que disminuyó en \$2 la cuota inicial por persona.
   a) ¿Cuántos estudiantes eran al inicio y cuál era la cuota fijada? ______________________

   ____
   b) Formula la ecuación que expresa las relaciones del problema y llévala a la forma $x^2 + bx + c = 0$.
   c) Resuelve la ecuación por factorización.
4. Escribe una ecuación cuyo lado izquierdo sea un polinomio y cuyas soluciones sean $x_1 = 8$ y $x_2 = -4$.
5. Con base en la siguiente propiedad de los enteros, escribe la expresión algebraica y da ejemplos.

"Si se disminuye en uno la suma de un número al cuadrado y su sucesor al cuadrado, el resultado es igual al doble del producto de los dos números."

Reúnanse en equipos y comparen sus respuestas. Comenten si hubiera sido posible resolver los problemas con métodos aritméticos y cuáles serían las ventajas y desventajas de utilizar métodos algebraicos.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Ecuación cuadrática **Solución de una ecuación** **Ecuaciones factorizables**

El alumno aprenderá a:
Analizar las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

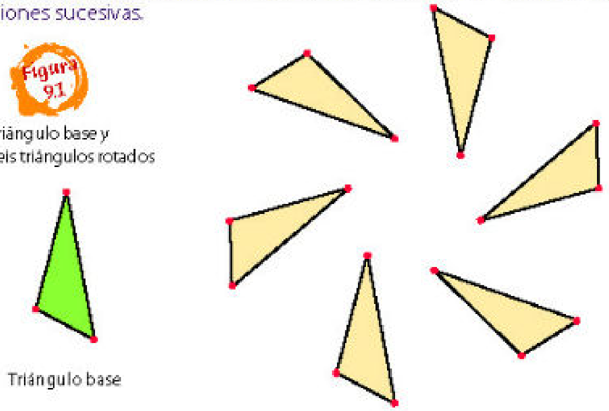
Lección 9 Rotación y traslación de figuras

Problema de investigación

De manera individual contesta las preguntas respecto a la traslación y rotaciones de un triángulo.

- En la figura 9.1, se muestra el triángulo base (triángulo verde) con el que se generaron los otros seis triángulos mediante una traslación del triángulo base y cinco rotaciones sucesivas.

Figura 9.1
Triángulo base y seis triángulos rotados



a) ¿Cómo se trasladó el triángulo base? ______________________

b) ¿Cómo se hicieron las cinco rotaciones sucesivas? ______________________

c) Encuentra el centro y el ángulo de rotación en los triángulos rotados. ______________________

En parejas, comparen el centro que encontraron y escriban cómo determinaron cuál es el centro y el ángulo de rotación. ______________________

Rotación de figuras

Actividad 1. Reúnete con un compañero y lleven a cabo lo que se solicita.

Problema. Para hacer esta actividad se necesitan los siguientes materiales:

- Acetatos o micas tamaño carta.
- Una tachuela o una chinche.
- Plumas para acetato (diferentes colores).
- Una tabla de madera.
- Un juego de geometría.

a) Marquen un punto en medio de una hoja tamaño carta. Con ese punto como centro, tracen un círculo lo más grande posible dejando el mínimo espacio en la hoja. Luego tomen dos acetatos del mismo tamaño y pónganlos encima.

b) Recorten el círculo trazado en la hoja junto con los acetatos para obtener dos círculos transparentes. Coloquen un círculo de acetato sobre la tabla. Llamen *A* al centro y peguen un dibujo como se muestra en la figura 9.2.

c) Coloquen el otro círculo de acetato y únanlos con la chinche de manera que atraviese el centro de ambos. Con una pluma de diferente color dibujen en el acetato de arriba cómo vería el pajarito si el acetato se rotará 35° (pueden utilizar el transportador para calcular mejor el giro, pero sin hacer marcas en el acetato ni giros). Señalen hacia dónde creen que apuntarán el pico, las alas y las patas.

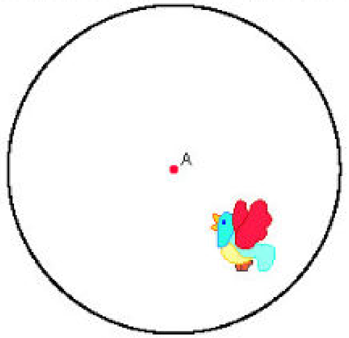


Figura 9.2
Círculo con un pajarito

d) Después de haber dibujado la imagen, giren el acetato de abajo 35° y vean qué tan cercanas fueron sus predicciones de lo que realmente sucede.

e) Repitan el ejercicio con otros ángulos. Cambien la posición inicial del pajarito.

i) ¿Qué cambia del pajarito al hacer el giro? ______________________

ii) ¿Qué es lo que no cambia? ______________________

En grupo, comparen sus predicciones mostrando las marcas que realizaron. Pidan a sus compañeros que pasen a explicar los diferentes ángulos que utilizaron.

Actividad 2. En equipos, hagan lo que se pide.

Problema. En la figura 9.3 se muestran dos cuadriláteros. El cuadrilátero *A'B'C'D'* es una transformación del cuadrilátero *ABCD*.

Figura 9.3
El cuadrilátero *ABCD* y una transformación

a) ¿Con cuál de las siguientes transformaciones se obtiene *A'B'C'D'* a partir de *ABCD*?

i) Reflexión ii) Traslación iii) Rotación

b) Con base en la respuesta del inciso *a*, respondan:

i) Si se trata de una reflexión, encuentra el eje de simetría.

ii) Si se trata de una traslación, ¿cuáles son la dirección y la magnitud del desplazamiento? ______________________

iii) Si se trata de una rotación, ¿cuáles son el centro y el ángulo de rotación? ______________________

c) Expliquen cómo obtuvieron las respuestas del inciso *b*. ______________________

d) ¿Cómo son las medidas de los lados del cuadrilátero *ABCD* respecto a las del cuadrilátero *A'B'C'D'*? Justifiquen su repuesta. ______________________________

____

e) ¿Cómo son las medidas de los ángulos del cuadrilátero *ABCD* respecto a las del cuadrilátero *A'B'C'D'*? Argumenten su repuesta. ______________________________

____

f) ¿El área del cuadrilátero *ABCD* mide lo mismo que el área del cuadrilátero *A'B'C'D'*? ______________. ¿Por qué? ______________________________

____

g) ¿Cómo es la inclinación, respecto a una horizontal, de los lados del cuadrilátero *ABCD* en relación con los lados correspondientes del cuadrilátero *A'B'C'D'*? ______________________________

____

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Busquen y comenten si hay más propiedades de los cuadriláteros al aplicar reflexión, traslación o rotación. Analicen si estas propiedades se conservan o cambian y escríbanlas en su cuaderno.

Actividad 3. Formen parejas y respondan lo que se pide.

Problema 1. Los siguientes enunciados se refieren a la rotación de figuras. Escriban una V si el enunciado es verdadero o una F si es falso. Expliquen su respuesta y dibujen en su cuaderno un ejemplo.

a) El área de una figura rotada es igual al área de la figura original. ______________

b) La dirección (es decir, su pendiente respecto a una recta horizontal) de un segmento rotado un ángulo α ($\alpha \neq 0°, 360°, 720°, \ldots$) es igual a la dirección del segmento original. ______________

c) La medida de un ángulo entre dos rectas concurrentes que se han rotado, un ángulo α es igual al ángulo entre las dos rectas originales. ______________

d) El área de una figura rotada es igual al cuadrado del área de la figura original. ______________

e) La medida de un ángulo entre dos rectas concurrentes que se han rotado un ángulo β, si las rectas originales tenían un ángulo α, es igual a $\alpha + \beta$. ______________

f) La orientación de una figura rotada es igual a la orientación de la figura original.

____

g) La orientación de una figura rotada es igual a la orientación inversa de la figura original.

____

h) Un segmento rotado tiene la misma longitud que el segmento original. ______________

Problema 2. Con base en los enunciados del problema 1, elijan la propiedad que se refiere a cada una de las siguientes expresiones.

- Se conservan distancias. ______________________________
- Se conservan ángulos. ______________________________

- Se conserva la orientación. ______________________________
- Se conservan áreas. ______________________________

Reúnanse con otra pareja y comparen las respuestas al problema 1. Para comprobar que la respuesta al enunciado sea correcta, utilicen el dispositivo de la actividad 1 haciendo lo que dice cada enunciado en el dispositivo. Intercambien los contraejemplos o razones que les permitieron descubrir que los enunciados eran falsos.

Construcción de una figura resultante de una rotación

En las actividades anteriores han realizado rotaciones con el dispositivo que elaboraron en la actividad 1; también se puede obtener una figura rotada utilizando el juego de geometría.

Actividad 4. De manera individual lleven a cabo esta actividad en su cuaderno utilizando un juego de geometría.

Problema. Traza un hexágono cualquiera. Puede ser como el que se muestra en la figura 9.4.

a) Marca un punto *O* cualquiera fuera del polígono.

b) Traza el segmento $\overline{OA}$.

c) Traza una recta que pase por *O* formando un ángulo de 45° con el segmento $\overline{OA}$.

d) Localiza sobre la recta *A'* tal que $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y $\measuredangle AOA' = 45°$.

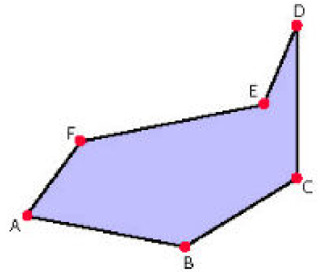


Figura 9.4 Polígono irregular

e) Haz lo mismo con cada uno de los vértices restantes.

f) Une los puntos encontrados con segmentos para formar el polígono *A'B'C'D'E'F'*. Este polígono se denomina la imagen de *ABCDEF* bajo una rotación de 45° con centro en *O*.

En parejas, escriban todo lo que consideren relevante acerca de los lados y los ángulos del polígono original y su imagen. Con la guía de su maestro lleguen a un acuerdo sobre las respuestas adecuadas.

Problemas

Formen equipos para hacer lo que se solicita.

1. Copien en su cuaderno los polígonos de las figuras 9.5, 9.6 y 9.7 y rótenlos de acuerdo con las condiciones dadas.

a) Roten 38° respecto a un centro de rotación fuera del triángulo.

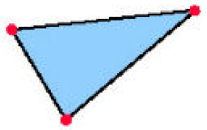


Figura 9.5 Triángulo

b) Roten 62° respecto a un centro de rotación dentro del cuadrado.

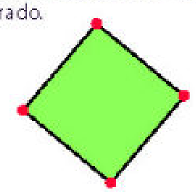


Figura 9.6 Cuadrado

c) Roten 175° respecto al centro de rotación igual al vértice *A* del pentágono.

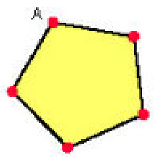


Figura 9.7 Pentágono

2. Tomen cualquier vértice del polígono de la figura 9.5 y llámenlo *B* y a su correspondiente en la imagen obtenida por la rotación denomínenlo *B'*. Consideren el segmento $\overline{BB'}$ y tomen su punto medio *M*, tracen $\overline{OM}$. ¿Qué observan? Repitan el procedimiento para los otros vértices.
3. Hagan lo que se pidió en el punto 2 para los polígonos de las figuras 9.6 y 9.7.

Reúnanse con otro equipo y contrasten sus explicaciones sobre cómo construir una figura rotada a partir de la figura original, el ángulo y el centro de rotación.

Con ayuda del maestro lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas, en particular, sobre el método para construir figuras rotadas.

Traslación de figuras

Actividad 5. En parejas, lleven a cabo en su cuaderno las actividades que se proponen y respondan las preguntas.

Problema. En la figura 9.8 se muestran dos triángulos.

a) ¿Cómo son entre sí los triángulos de la figura 9.8? ____________________

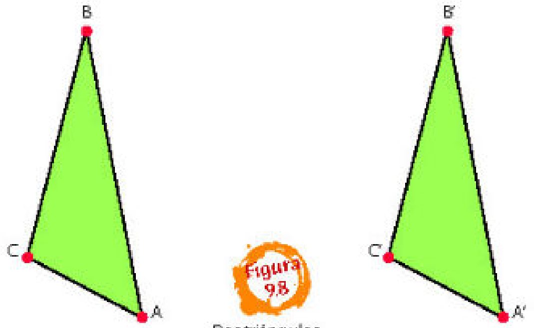


Figura 9.8
Dos triángulos

b) Si originalmente se tenía el triángulo *ABC*, ¿con qué transformación se obtiene el triángulo *A'B'C'*? ____________________

c) Tomen como base el triángulo *ABC* de la figura 9.8 y hagan lo que se pide.

i) Midan la distancia que hay de *A* a *A'*, la distancia de *B* a *B'* y la distancia de *C* a *C'*. ¿Qué observan? ____________________

ii) Dibujen una flecha de *A* a *A'* y realicen lo mismo con todos los vértices correspondientes. ¿Qué observan? ____________________

d) Comenten la siguiente afirmación: "La flecha $\overline{AA'}$ caracteriza el desplazamiento del triángulo *ABC* al triángulo *A'B'C'*".

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Discutan qué relación existe entre la afirmación del inciso *d* con la información del recuadro "Traslación" de la página 81.

Traslación

La **traslación de un punto *A*** en una dirección, un sentido y una magnitud dados es un punto *A'* que resulta de mover el punto *A* en esa dirección, ese sentido y esa magnitud.

La **traslación de una figura** en una dirección, un sentido y una magnitud dados es otra figura que resulta de trasladar todos sus puntos en esa dirección, esa magnitud y ese sentido.

La **dirección** queda determinada con una recta punteada como se muestra en la figura 9.9, la **magnitud** con un número o un segmento en las unidades pertinentes —que en el círculo de la figura 9.9 es el radio—, y el **sentido** con los signos "+" o "–" (+ se indica con la punta de la flecha en la figura 9.9; el – es en sentido contrario). Con una flecha, que llamaremos **directriz**, se pueden sintetizar estas tres propiedades.

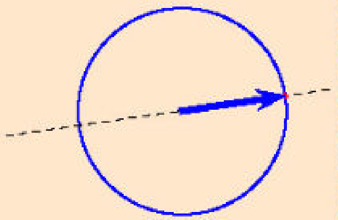


Figura 9.9
Representación de la directriz

Actividad 6. De manera individual haz lo que se pide.

Problema. Escribe una V si el enunciado es verdadero o una F si es falso y justifica cada una de las respuestas.

a) El área de una figura trasladada es igual al área de la figura original. ________
b) La dirección (es decir, su pendiente respecto a una recta horizontal) de un segmento rotado un ángulo $\alpha \neq 0$ es igual a la dirección del segmento original. ________
c) La medida de un ángulo entre dos rectas que han sido trasladadas dos unidades en dirección de un ángulo α es igual al ángulo entre las dos rectas originales. ________
d) El área de una figura trasladada es igual al cuadrado del área de la figura original. ________
e) La medida de un ángulo entre dos rectas que han sido trasladadas *a* unidades en dirección de un ángulo β, siendo que las rectas originales tenían un ángulo α, es igual a $\alpha + \beta$. ______
f) La orientación de una figura trasladada es igual a la orientación de la figura original. ______
g) La orientación de una figura trasladada es igual a la orientación inversa de la figura original. ________
h) Un segmento trasladado tiene la misma longitud que el segmento original. ________

En equipos, escriban qué propiedad o propiedades de las rotaciones no cumplen las traslaciones y viceversa.

Comparen los resultados que hallaron en la actividad 3 con los que obtuvieron en esta actividad.

Problemas

Formen equipos de tres alumnos y tracen en su cuaderno lo que se pide a continuación.

Para las figuras 9.10 y 9.11 obtengan la imagen del polígono al trasladarlo de acuerdo con la dirección y la magnitud de la directriz indicada.

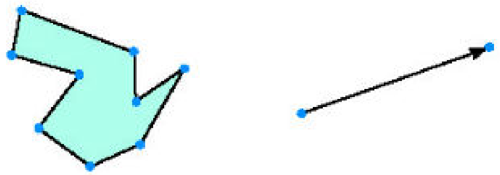


Figura 9.10 Polígono irregular

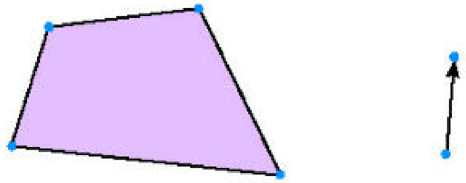


Figura 9.11 Polígono irregular

Uso de las TIC

En parejas, realicen lo que se solicita.

1. Efectúen las traslaciones en el software GeoGebra.
   a) Con la herramienta "Polígono" tracen un cuadrilátero y llámenlo P.
   b) Con la herramienta "Vector" dibujen un vector cualquiera y llámenlo V.
   c) Con la herramienta "Traslación" obtengan la imagen de P usando V. A la imagen de P llámenla Q.
   d) Tracen un vector W de modo que al aplicar una traslación a Q con el vector W la imagen sea el polígono P.
2. Hagan las rotaciones en el software GeoGebra.
   a) Busquen la herramienta "Rotación" de GeoGebra.
   b) Tracen un polígono R, elijan un punto *O* como centro y a R aplíquenle una rotación con centro en el punto *O* y un ángulo cualquiera α. A la imagen llámenla S.
   c) ¿Pueden encontrar un ángulo β de manera que la rotación de S con centro en *O* y ángulo β sea R? Hagan conjeturas y exploren el resultado.
   d) Si es necesario, vuelvan a empezar usando otro ángulo α para que la cuestión planteada en el inciso *c* se pueda resolver.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. Con base en la figura 9.12 encuentra:
   a) El vector correspondiente a la traslación que lleva de *P* a *P'*.
   b) Encuentra el centro de la rotación y el ángulo que lleva de *Q* a *Q'*.

Figura 9.12 Dos figuras con sus respectivas traslaciones

2. Cinco de los ocho cuadriláteros mostrados en la figura 9.13 son resultado de efectuar una traslación o una rotación del cuadrilátero *ABCD*.
   a) Identifica las traslaciones del cuadrilátero *ABCD* obtenidas con $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
   b) Identifica los ángulos de las tres rotaciones del cuadrilátero *ABCD* con centro en *M*.
   c) Indica qué cuadriláteros no corresponden a ninguna traslación o rotación.

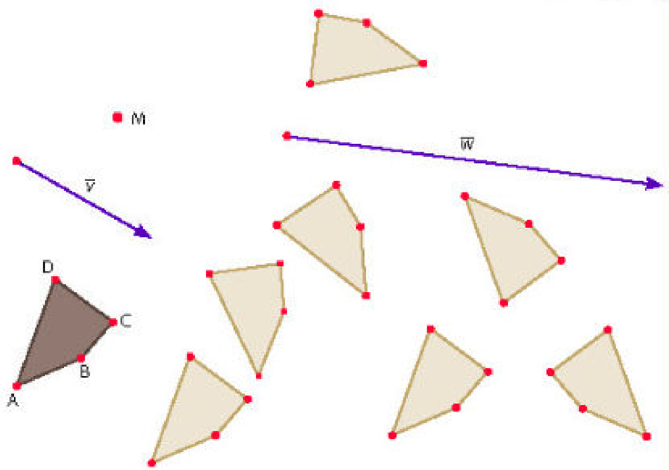


Figura 9.13 Ocho cuadriláteros

En parejas, analicen las razones por las que los cuadriláteros de la figura 9.13 (inciso c) no pueden ser ni traslaciones ni rotaciones.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Rotación **Vector** **Traslación**

El alumno aprenderá a:
Construir diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Lección 10

Diseños y transformaciones

Problema de investigación

De manera individual realiza lo que se pide.

- En la figura 10.1 se muestra una figura base (formada por un cuadrado y un triángulo equilátero), mientras que en la figura 10.2 se presenta un azulejo generado con secuencias de transformaciones de la figuras 10.1.

  a) ¿Cuáles y cuántas son esas transformaciones? ______________________________

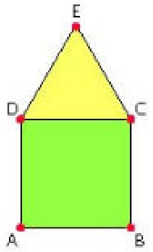


Figura 10.1 Figura base

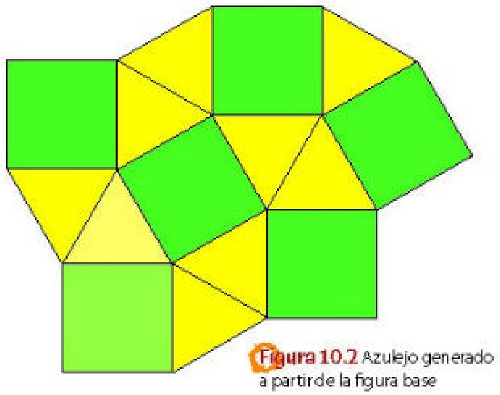


Figura 10.2 Azulejo generado a partir de la figura base

  b) En la figura 10.2, la figura base aparece en tonos de color más tenues. Reproduce el azulejo en tu cuaderno, numera los cuadrados y los triángulos para que puedas referirte a ellos.

  c) Propón las transformaciones que consideres necesarias para generar las figuras del azulejo a partir de la figura base. En cada transformación indica sus características (centro de rotación, ángulo de las rotaciones, directriz de las traslaciones, eje de simetría o centro de simetría).

  d) Encuentra las rotaciones realizando lo siguiente:

     i) Elige parejas de cuadrados que coincidan en un vértice e investiga el centro de rotación y el ángulo en el que se debe hacer rotar uno de los cuadrados para obtener el otro.

     ii) Elige parejas de triángulos con un vértice común y encuentra el centro de rotación y el ángulo en el que se debe hacer rotar uno de los triángulos para obtener el otro.

     iii) Determina si con secuencias de rotaciones se puede generar todo el azulejo.

Formen equipos de tres alumnos y comenten sus resultados. Consideren que hay varias maneras de generar el azulejo. Indiquen cuál tiene menor número de transformaciones.

Transformaciones del plano

Las traslaciones, rotaciones y simetrías centrales y axiales se denominan movimientos o transformaciones del plano. Estos movimientos permiten crear diseños utilizados en la decoración de paredes, pisos, edificios, ropa, tazas, etcétera. Con cartulina, un juego de geometría y colores se pueden diseñar mosaicos interesantes.

Actividad 1. De manera individual lleva a cabo lo que se solicita en cada inciso.

Problema. Valentina elaboró un diseño para adornar su cuarto como el que se aprecia en la figura 10.3. Partió de una figura base y luego usó transformaciones para construirlo.

a) Elige una mínima parte del dibujo que se muestra en la figura 10.3, de tal manera que con ella pueda generarse toda la figura. Dibújala en tu cuaderno y llámala *A*.

b) Describe cómo se obtiene todo el diseño a partir de *A* mediante transformaciones. Indica qué transformaciones utilizaste y cuáles son sus características.

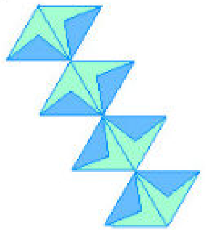


Figura 10.3 Diseño de Valentina para adornar su cuarto

Reúnete con otro compañero y contrasten sus respuestas. Verifiquen que con las transformaciones propuestas se consiga el resultado; en caso contrario, corríjanlas.

Construcción de frisos

Friso

Un **friso** es una forma decorativa que se obtiene a partir de una **figura base** (también llamada **motivo**) al aplicar consecutivamente una misma traslación, es decir, al resultado se aplica la traslación (o imagen) de la traslación anterior.

Actividad 2. En parejas hagan lo que se pide.

Problema. En la figura 10.4 se muestra un friso cuyo motivo es una locomotora.

a) Dibujen sobre el friso una directriz que represente la traslación utilizada para construirlo.

Figura 10.4 Friso de una locomotora

b) ¿Cuántas traslaciones se realizaron para completar el friso de la figura 10.4? ______________________________

c) Copien o dibujen en el siguiente recuadro una figura base y diseñen con ella un friso con seis traslaciones sucesivas.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus frisos. Vean si coinciden las directrices que propusieron para indicar la traslación realizada en el inciso c. Si no coinciden, comenten las diferencias y cómo pueden producir el mismo friso.

Con la guía de su maestro, lleguen a un acuerdo sobre la directriz que representa adecuadamente la transformación. Analicen el significado de que dos directrices sean iguales.

Motivos construidos con transformaciones

Si bien los frisos se construyen sólo con traslaciones, con una figura puede diseñarse un motivo utilizando otras transformaciones y luego aplicarle las traslaciones. En la actividad 3 vas a hacer frisos.

Actividad 3. En equipos de tres o cuatro alumnos hagan lo siguiente.

Problema. En la figura 10.5 se muestra un friso.

a) ¿Con qué transformaciones se obtuvo el diseño de la figura 10.5?

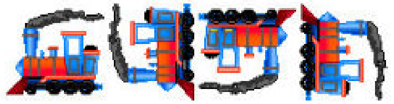


Figura 10.5 Friso

b) Con la figura 10.5 como motivo se construyó el friso de la figura 10.6.

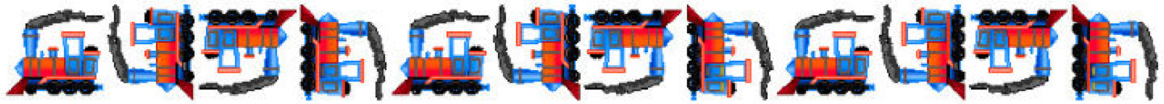


Figura 10.6 Friso

i) Indiquen qué traslación se aplicó al diseño de la figura 10.5 (es decir, el motivo) para obtener el siguiente elemento del friso de la figura 10.6. ____________________

____

ii) ¿Cuántas veces se aplicó la traslación? ____________________

Reúnanse con otro equipo y contrasten sus respuestas. Busquen a su alrededor frisos que se puedan construir a partir de una figura base (motivo) y la aplicación reiterada de alguna de estas transformaciones: reflexión respecto a un punto, reflexión respecto a una recta, rotación o traslación.

Expliquen a los integrantes del equipo el friso que encontraron y cómo se genera.

Actividad 4. En equipos respondan lo que se pide.

Problema 1. Aurora quiere dibujar un friso semejante al de la actividad 3 en el que cada dos trenes contiguos vayan en direcciones opuestas. Su amiga Leticia le dice que use simetría, pero no está segura de si debe ser central o axial.

a) ¿Están de acuerdo con lo que sugiere Leticia? ____________. ¿Por qué? ____________

____

b) ¿Qué tipo de simetría se requiere para dibujar un friso como el que desea Aurora?

____

c) En figura 10.7 marquen el punto o eje de simetría para conseguir el friso de Aurora.

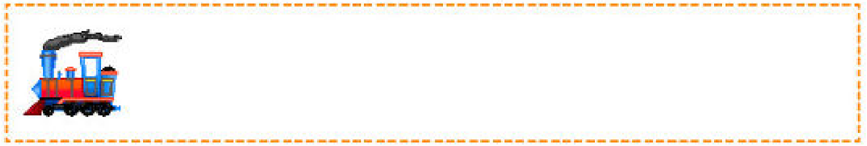


Figura 10.7 Motivo para elaborar un friso

d) En el recuadro de la figura 10.7 completen los cuatro primeros elementos del friso.

Envíen un mensaje a un compañero explicándole cómo es posible obtener un friso en el cual los motivos cambien su orientación o aparezca como que van en direcciones opuestas.

____

____

Problema 2. Si a una figura *A* se le aplica simetría axial respecto a un punto *O* y se obtiene la figura *A'*, ¿qué ocurre si a *A'* se le aplica de nuevo simetría central respecto a *O*? Si no conocen la respuesta, experimenten con el polígono *A* y el centro de simetría *O* (figura 10.8).

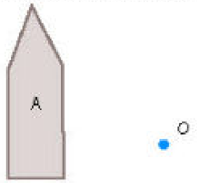


Figura 10.8 Polígono A y centro de simetría O

a) El friso de la figura 10.9 se realizó usando simetrías centrales con distintos centros de simetría. Dibujen todos los centros de simetría.

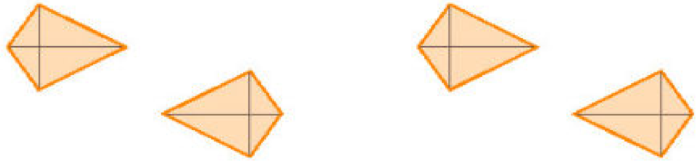


Figura 10.9 Friso construido a partir de simetría central

Problemas

En parejas, resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.

1. En la figura 10.10 se observa un friso de triángulos.
   a) Describan las transformaciones que se deben realizar si la figura base es el triángulo A.
   b) Encuentren el centro de rotación, el eje o el punto de simetría o la directriz de traslación para las transformaciones que propongan.

Figura 10.10 Un friso hecho con triángulos

c) Marquen una cruz o una estrella en el friso de la figura 10.10, de tal manera que no esté en el centro del triángulo, sino sesgado hacia un lado.

d) Dibujen en el resto de los triángulos la misma cruz o estrella en la posición que quedaría después de las transformaciones correspondientes.

2. Copien la figura 10.11 en una hoja cuadriculada. Construyan tres frisos con motivos elaborados con el triángulo, con alguna de las directrices indicadas y tomando en cuenta las siguientes restricciones:

- Hagan rotar el triángulo 90° en relación con el vértice P, trasladen el triángulo resultante con la directriz $\vec{B}$ y refléjenlo respecto al lado vertical de este último triángulo. Formen el motivo con el primero, el tercero y el último triángulo de las transformaciones anteriores. Luego trasladen seis veces todo el motivo, utilizando la directriz $\vec{A}$.

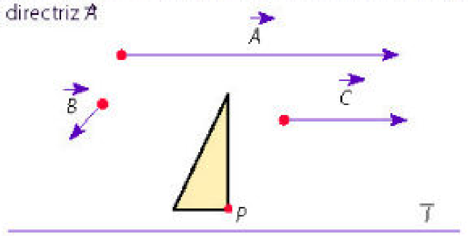


Figura 10.11 Un triángulo, tres directrices y un eje de simetría

a) Reflejen el triángulo respecto a la recta horizontal T, trasladen seis veces el motivo utilizando la directriz $\vec{C}$.

b) Reflejen el triángulo respecto al punto P, trasladen el motivo seis veces utilizando la directriz $\vec{C}$.

Reúnanse con otra pareja y comparen los frisos resultantes. Expliquen a la otra pareja cómo los obtuvieron y lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Mosaicos

Actividad 4. Lleven a cabo esta actividad en parejas.

Problema. Con cada una de las piezas que se muestran en la figura 10.12 es posible generar un mandala como el de la figura 10.13.[1]

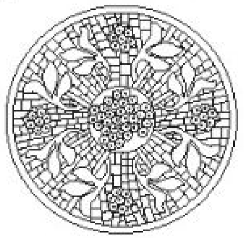
Figura 10.12 Piezas de un mandala

Medio mosaico

$\frac{1}{4}$ de mosaico

$\frac{1}{8}$ de mosaico

Figura 10.13 Mandala



[1] Tomado de: http://mandalasparapintar.blogspot.mx/2010/05/mosaico-casa-navas.html (Consulta: 11 de abril de 2013.)

a) Indiquen qué transformaciones deben hacerse para completar el mandala de la figura 10.13 si utilizan las piezas que se muestran en la figura 10.12.

b) ¿Cuántas formas existen de completar el mandala con cada una de las piezas de la figura 10.12? ______________________

Reúnanse con otra pareja y señalen las diferencias de los mandalas generados con las transformaciones respecto al original de la figura 10.12.

Problemas

De manera individual haz en tu cuaderno lo que se pide.

1. En la figura 10.14, se muestra un mosaico elaborado a partir de una figura base conocida como *hueso nazarí*, que es de color blanco.

   a) ¿Cuántas transformaciones se pueden hacer para formar el mosaico a partir de la figura base?

   b) ¿Cuál es el ángulo y el centro de rotación?

   c) Dibuja los vectores de las traslaciones que se necesitan para formar el mosaico.

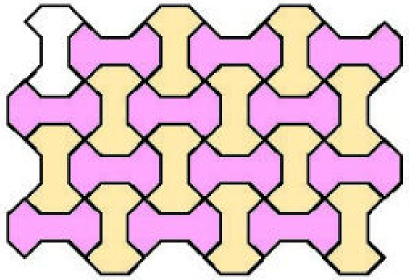


Figura 10.14 El *hueso nazarí* y un mosaico

Reúnanse en equipo y comparen sus propuestas. Verifiquen que en efecto se llegue a formar el mosaico con las transformaciones que indicaron.

Uso de las TIC

En parejas, hagan lo siguiente en el software GeoGebra.

1. Tracen un polígono cualquiera y apliquen diferentes transformaciones. Utilicen las herramientas "Trasladar", "Reflejar respecto a un punto", "Reflejar respecto a una recta", "Hacer rotar en relación con un punto dado en un ángulo dado".

2. Tracen un triángulo y realicen lo que se pide en el punto 2 de la sección "Problemas" (p. 87). Antes de realizar lo que se pide, predigan qué van a obtener y después háganlo. ¿Obtuvieron lo que predijeron? Si no fue así, modifiquen los trazos y vuelvan a hacer la descripción de cómo construir el friso.

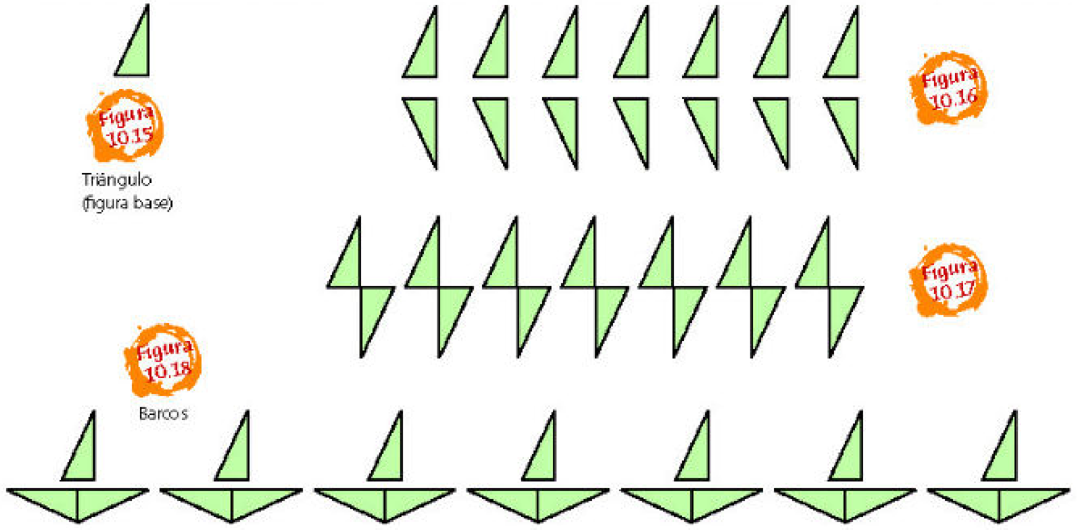
Intercambien las instrucciones que siguieron con otra pareja de tal manera que ellos lleven a cabo sus instrucciones y ustedes las de ellos. ¿Obtuvieron el mismo friso? Si no lo obtuvieron comenten, corrijan y tomen nota de las dudas por las cuales no obtuvieron el mismo friso.

Organicen un panel con el maestro para exponer las soluciones, los problemas que surgieron y cómo los resolvieron.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. La figura 10.15 es la figura base de las figuras 10.16, 10.17 y 10.18. Para cada figura indica mediante qué transformaciones se obtienen los frisos. Localiza los puntos de rotación y simetría. Dibuja los vectores de traslación.



2. En el software GeoGebra haz las transformaciones que se aplicaron a las figuras 10.16, 10.17 y 10.18, pero a un triángulo no equilátero.
   a) Observa la figura base y las figuras que se obtienen de acuerdo con lo solicitado en cada figura. Contrasta las figuras que obtuviste con las figuras 10.16, 10.17 y 10.18.
   b) Repite el procedimiento con un polígono de más de tres lados no regular.

Escribe un informe de lo que hiciste, de cuándo y por qué te equivocaste, de cómo corregiste y tus conclusiones.

Con la guía de su maestro organicen una plenaria donde presenten sus reportes, incluyan algunas imágenes de su trabajo para que las puedan comparar con las de otros compañeros.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Friso	**Mosaico**	**Traslación**
Rotación	**Simetría axial**	**Simetría**

El alumno aprenderá a: Analizar las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Lección 11 Triángulos y áreas

Problema de investigación

De manera individual haz lo que se solicita.

1. Claudia desea construir una terraza para su jardín en la que pueda colocar unas mesas; la forma del jardín es la de un cuadrado de 5 m de lado (figura 11.1). Para construir la terraza se considera el trazo de un cuadrado cuyo lado será la diagonal del terreno del jardín.

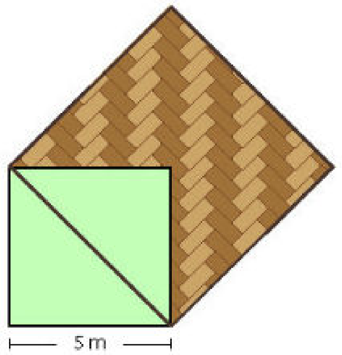


Figura 11.1
Jardín (zona verde) y terraza (zona café)

   a) ¿Cuál es el área de la terraza? ______
   b) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado con que se traza la terraza? ______
   Justifica tu respuesta. ______
   c) Calcula el área del cuadrado verde que representa al jardín. ______
   d) Calcula la longitud de la diagonal del jardín. ______

En parejas, comparen las áreas que obtuvieron. ¿Qué pueden concluir? ______

¿Cómo son entre sí las áreas de los cuadrados? ______

Un triángulo especial

Actividad 1. En parejas, lleven a cabo en su cuaderno lo que se pide. Necesitarán un juego de geometría.

Problema. Tracen un triángulo cuyos lados midan 3 u, 4 u y 5 u. La u puede ser centímetros o cualquier unidad que ustedes determinen. Por ejemplo, en la figura 11.2 se muestran tres segmentos con esas dimensiones de acuerdo con una unidad elegida.

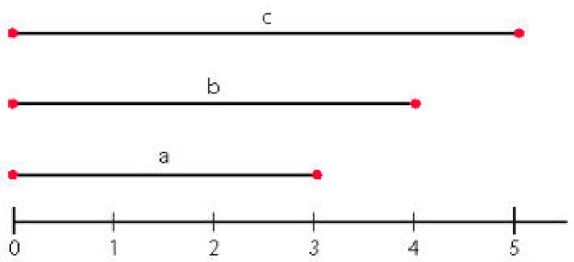


Figura 11.2 Tres segmentos

a) Después de construir el triángulo, midan con el transportador el ángulo que forman los lados cuya longitud es de 3 u y 4 u. ¿Qué medida tiene el ángulo? ______________________

b) Sobre cada lado del triángulo, construyan un cuadrado cuyo lado sea del mismo tamaño que el lado del triángulo. ______________________

c) Calculen las áreas de los cuadrados que tengan como lado 3 u y 4 u. ¿Cuál es el resultado si suman estas áreas? ______________________

d) Calculen el área del cuadrado que tiene como lado 5 u. ______________________

e) Comparen el área del inciso *c* con la que obtuvieron en el inciso *d*. ¿Qué observan? ______________________

Reúnanse con otras parejas y formulen sus observaciones respecto al ángulo y las áreas de los cuadrados construidos con los lados del triángulo.

Triángulos rectángulos y figuras equivalentes

En el recuadro de definición "Triángulo rectángulo" se indican los nombres con que se denomina a sus lados.

Triángulo rectángulo

Un **triángulo es rectángulo** cuando uno de sus ángulos interiores es recto (es decir, mide 90°). En un triángulo rectángulo los lados adyacentes al ángulo recto se llaman **catetos**, mientras que el lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa**, como se muestra en la figura 11.3.

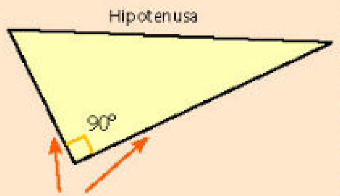


Figura 11.3 Triángulo rectángulo

Las comparaciones de áreas de figuras tienen, generalmente, relaciones algebraicas y numéricas importantes. Por ejemplo, en el "Problema de investigación" es posible calcular la diagonal del cuadrado pequeño de la siguiente forma: $\sqrt{50} \approx 7.07$. ¿Cómo se llegó a este resultado?

____

____

Para hacer algunas exploraciones similares que conducen al resultado anterior lean el recuadro de definición "Figuras equivalentes".

Figuras equivalentes

Dos **figuras son equivalentes** si tienen la misma área.

Actividad 2. En equipos, respondan las preguntas del problema siguiente.

Problema. Consideren un triángulo rectángulo de lados *a*, *b* y *c*, como el de la figura 11.4. Observen después los cuadrados iguales de lado $a + b$ de la figura 11.5, que se forman con el triángulo de la figura 11.4.

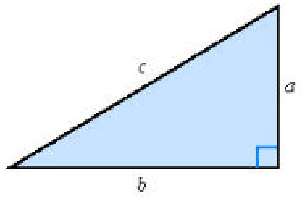


Figura 11.4 Un triángulo rectángulo

a) Las figuras 11.5 y 11.6 son equivalentes. ¿Cómo es el área del cuadrado gris de la figura 11.5 comparada con el área del cuadrado de lado *b* de la figura 11.6? Justifiquen su respuesta.

____

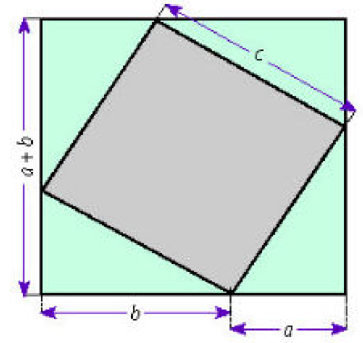


Figura 11.5 Dos cuadrados

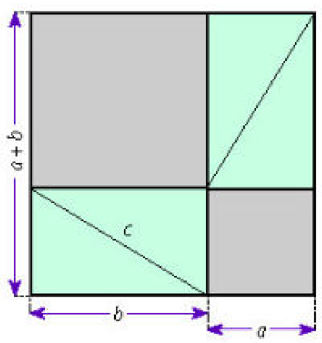


Figura 11.6 Un cuadrado formado con triángulos

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del cuadrado gris de la figura 11.5?

____

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de color gris del cuadrado de la figura 11.6? ______________________

d) Expresen algebraicamente la igualdad (o desigualdad) que encontraron en el inciso *a*.

____

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. ¿Qué pueden concluir de las áreas que encontraron? ______________________

¿Cómo son las expresiones algebraicas? ______________________. Escriban la conclusión de sus respuestas. ______________________

____

Actividad 3. En equipos, hagan lo que se pide. Necesitan una cartulina, un juego de geometría y tijeras.

Problema 1. En la cartulina, tracen las siguientes figuras.

a) Un triángulo rectángulo colocando la hipotenusa en la horizontal (figura 11.7).

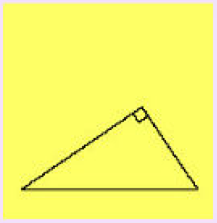


Figura 11.7 Triángulo rectángulo

b) Un cuadrado cuyo lado sea la hipotenusa del triángulo y dibújenlo dentro del cuadrado. Recorten el cuadrado y nombren sus vértices con *ABCD* (figura 11.8).

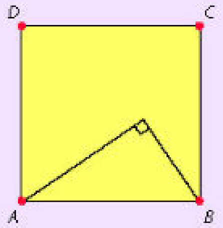


Figura 11.8 Triángulo rectángulo dentro de un cuadrado

c) Un segmento que prolongue el cateto más pequeño del triángulo hasta tocar el lado del cuadrado. Coloquen la letra *P* en la intersección del segmento con el lado superior del cuadrado (figura 11.9).

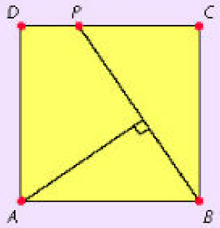


Figura 11.9 Dos triángulos rectángulos

d) Un segmento perpendicular al cateto $\overline{PB}$ que pase por el vértice *C*. Indiquen con *E* la intersección con $\overline{PB}$. Llamen *F* el tercer vértice del triángulo rectángulo como se ve en la figura 11.10.

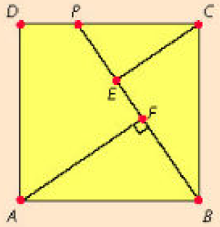


Figura 11.10 Dos triángulos rectángulos con un segmento paralelo

e) Encuentren *Q* tal que $\overline{BQ} = \overline{DP}$, y por *Q* tracen una paralela al segmento $\overline{AF}$. Llamen *G* a la intersección del segmento perpendicular a $\overline{BP}$, como en la figura 11.11.

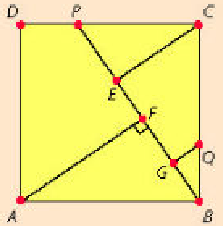


Figura 11.11 Triángulo rectángulo

Problema 2. Con base en la figura 11.11, obtengan la figura 11.12 haciendo lo siguiente:

a) Una rotación del triángulo *ABF*.

b) Una rotación del triángulo *PEC*.

c) Una traslación y rotación del triángulo *BGQ*.

d) ¿Cuáles son las dimensiones de los cuadrados de la figura 11.12? ______________________

____

e) Utilicen las figuras 11.8 y 11.11 y muestren que, para el triángulo rectángulo *ABF*, se cumple que la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

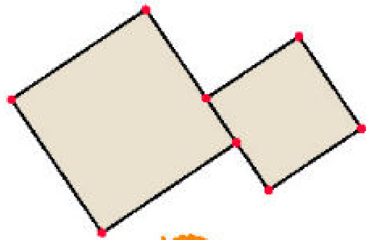


Figura 11.12 Dos cuadrados

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten las diferencias y las semejanzas del procedimiento que realizaron en el problema 1 comparado con el problema 2. ¿Ambos les parecen igual de claros y convincentes? Justifiquen su respuesta.

____

Uso de las TIC

- De manera individual, traza en el software GeoGebra un triángulo rectángulo de la siguiente forma.
  a) Traza los puntos *A* y *B*, y únelos con una recta.
  b) Por el punto *A* traza una perpendicular al segmento $\overline{AB}$. Sobre esta perpendicular marca un punto *C*.
  c) Con la herramienta "Polígono", de la cuarta ventana del menú, traza el triángulo *ABC*.
  d) Con la herramienta "Expone/oculta objeto", de la última ventana del menú, oculta las rectas que trazaste de manera que sólo quede el triángulo. ¿Cómo es el triángulo *ABC*? ______________________
  e) Coloca el puntero en cualquier vértice y haz clic en el botón derecho del ratón para moverlo. ¿Cómo es ahora el triángulo? ______________________. A lo que acabas de hacer se le llama prueba de arrastre.
  f) Traza cuadrados sobre cada uno de los lados del triángulo.
  g) Con la herramienta "Área", obtén el área de cada uno.
  h) Verifica que la suma del área de los cuadrados de los catetos sea igual al área del cuadrado de la hipotenusa.
  i) Arrastra los vértices del triángulo y verifica que se siga cumpliendo la relación del inciso *h* con cualquier otra dimensión de los lados del triángulo.

En parejas comparen las figuras que obtuvieron con la pantalla que se muestra en la figura 11.13. ¿Obtuvieron los mismos resultados? En caso de no haber obtenido el mismo resultado, revisen los pasos que hicieron y corríjanlos.

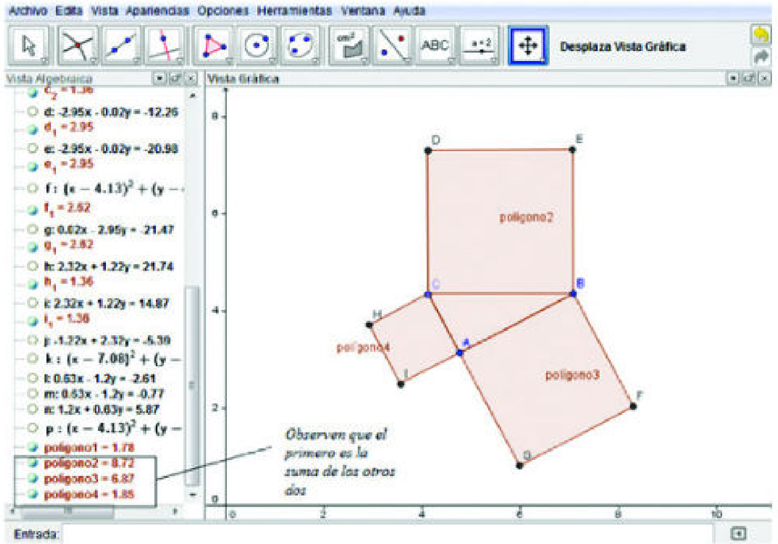


Figura 11.13 Pantalla de GeoGebra

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. En la figura 11.14 se muestra una sucesión de tres arreglos. La figura 11.14*i* es equivalente a la figura 11.14*ii*.

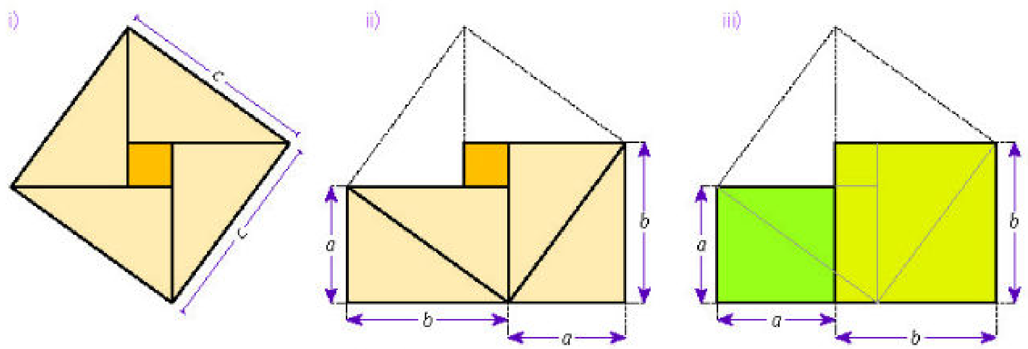


Figura 11.14 Tres figuras equivalentes

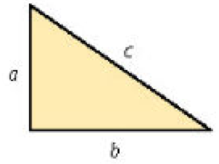
a) ¿Cuáles son las figuras que se rotan? ____________________

b) ¿Cuáles son los centros y los ángulos de rotación? ____________________

c) La figura 11.14*iii* es equivalente a la figura 11.14*ii*. En la figura 11.14*iii* se muestran dos cuadrados: uno de lado *a* y otro de lado *b*. ¿Cómo se puede llegar a la figura 11.14*ii*? ____________________

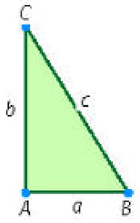
d) Utilizando las figuras equivalentes de la figura 11.14, muestra que para el triángulo rectángulo de catetos *a* y *b* e hipotenusa *c* (figura 11.15) se cumple que la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Figura 11.15 Triángulo rectángulo



2. En la figura 11.16 se observa un triángulo rectángulo y en la figura 11.17, un arreglo en el que se han construido cuadrados sobre los lados del triángulo y se han dividido de tal manera que las figuras del mismo color son equivalentes.

Figura 11.16 Triángulo rectángulo



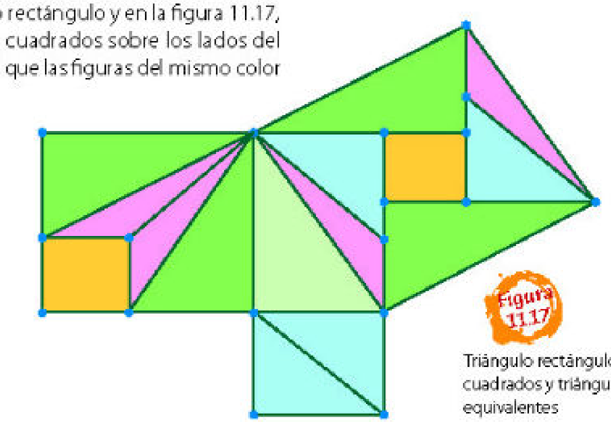


Figura 11.17 Triángulo rectángulo con cuadrados y triángulos equivalentes

a) Escribe con qué argumentos se puede verificar que las figuras geométricas del mismo color de la figura 11.17 son equivalentes.

b) Con base en la equivalencia de las figuras geométricas de la figura 11.17, establece que el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Reúnanse en equipos y comparen sus respuestas. ¿Coinciden? ____________________. Comenten sobre la representación visual. ¿Pueden recordarla y reproducirla?

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Triángulo rectángulo **Catetos** **Hipotenusa**

El alumno aprenderá a:
Explicitar y usar el teorema de Pitágoras.

Lección 12 Teorema de Pitágoras

Problema de investigación

De manera individual, responde las preguntas y haz lo que se solicita.

- En la figura 12.1, se muestra un triángulo rectángulo en el que se indican las medidas de sus lados.

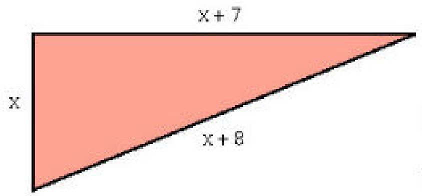


Figura 12.1
Triángulo rectángulo

a) ¿Cuáles son las dimensiones de los lados de la figura 12.1? ______________

b) ¿Cuál es la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados? ______________

c) Formula la ecuación correspondiente. ______________

d) Simplifica la ecuación y resuélvela. ______________

Contrasten sus respuestas con las de otros compañeros. ¿Obtuvieron la misma ecuación? ______________. Escriban en su cuaderno el procedimiento que realizaron para llegar al resultado.

Formulación del teorema de Pitágoras

Actividad 1. En equipos de tres alumnos lleven a cabo lo que se plantea en el siguiente problema.

Problema. En la figura 12.2, se trazó un triángulo rectángulo cuyos catetos son *a* y *b*, y cuya hipotenusa es *c*. En la lección 11 se dedujo la relación existente entre las áreas de los cuadrados que se forman a los lados del triángulo, como se muestra en la figura 12.3.

a) Formulen la proposición que relaciona las áreas de los cuadrados de la figura 12.3 con los lados del triángulo de la figura 12.2. ______________

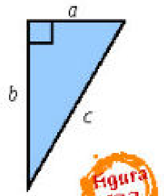


Figura 12.2
Triángulo rectángulo de catetos *a* y *b*, e hipotenusa *c*

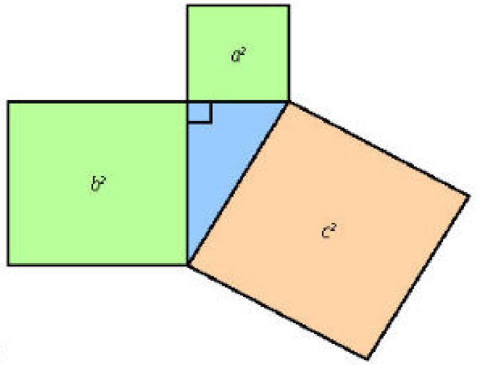


Figura 12.3
Triángulo rectángulo con los cuadrados de sus lados

La proposición que expresa la relación entre las áreas de los cuadrados de los lados en un triángulo rectángulo se llama **teorema de Pitágoras**. En la actividad 2 se pueden encontrar algunas de sus formulaciones.

Actividad 2. En parejas hagan lo siguiente.

Problema 1. Para las siguientes proposiciones, escribe una V si es verdadera o una F si es falsa.

a) En un triángulo, la suma de las áreas de los cuadrados que se forman en los lados pequeños del triángulo es igual al área del cuadrado que se forma en el lado grande. ______

b) En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados que se forman en los catetos es igual al cuadrado que se forma en la hipotenusa. ______

c) En un triángulo de lados *a*, *b* y *c*, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. ______

d) Si un triángulo es rectángulo y las longitudes de sus catetos son *a* y *b*, respectivamente, y la longitud de la hipotenusa es *c*, entonces se cumple que $a + b = c$. ______

e) Si los lados *a*, *b* y *c* de un triángulo satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces se trata de un triángulo rectángulo. ______

f) Si un triángulo es rectángulo y las longitudes de sus catetos son *a* y *b*, respectivamente, y la longitud de la hipotenusa es *c*, entonces se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. ______

Problema 2. Argumenten su respuesta en cada uno de los incisos del problema 1. Por ejemplo, ¿cómo puede mostrarse que la proposición del inciso *e* es verdadera?

a) Tracen dos segmentos *a* y *b*, de cualquier longitud; por ejemplo, 9 cm y 4 cm. Consideren un segmento de longitud: $c = \sqrt{9^2 + 4^2} = 9.85$.

b) Tracen un triángulo cuyos lados sean de 4 cm, 9 cm y 9.85 cm. Midan con un transportador los ángulos. ¿Obtuvieron un triángulo rectángulo? ______

c) Si la respuesta del inciso *b* es afirmativa, han aportado un argumento que apoya la veracidad de la proposición. Para fortalecerla, cada equipo repita la actividad con diferentes medidas del triángulo.

Reúnanse con otros equipos y comparen sus resultado para las diferentes medidas. ¿Qué tipo de triángulos obtuvieron? ______________. ¿A qué conclusión llegaron? ______________

El teorema de Pitágoras está formado por dos proposiciones, conocidas como *teorema directo* y *teorema inverso*. El teorema directo lo demostraron en la lección 11. Para el teorema inverso encontraron argumentos en el problema 2. Escriban las dos proposiciones de las que se compone el teorema de Pitágoras.

I: ______________________________

II: ______________________________

Actividad 3. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. Lean el recuadro de definición "Diagonales de un cubo" y con base en esta información respondan las preguntas.

> **Diagonales de un cubo**
>
> En un cubo, las **diagonales** son los segmentos de recta que unen vértices de diferentes caras.

a) Consigan un cubo de madera o de plástico, o bien armen uno de cartón.

b) Marquen un vértice del cubo y llámenlo *A*.

i) ¿En cuántas caras se encuentra *A*? ______________

ii) ¿En qué caras no se encuentra *A*? ______________

iii) Encuentren el vértice que no se encuentra en las mismas caras que *A* y llámenlo *B*.

c) Imaginen un segmento de recta que une *A* y *B*. ¿Cuánto mide el lado del cubo? ________.

Con base en esta medida encuentren la longitud del segmento $\overline{AB}$. ______________

¿Qué relación hay entre la longitud del segmento $\overline{AB}$ y el teorema de Pitágoras? ________

____

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Analicen en qué otros cuerpos geométricos es posible inferir un dato a partir de otros utilizando el teorema de Pitágoras.

Problemas

En equipos, lleven a cabo en su cuaderno lo que se pide.

1. Calculen la diagonal de un cuadrado que mide 10 cm de lado. ______________
2. ¿Qué es la apotema de un polígono regular? ______________
3. En cada inciso responde la pregunta planteada.
   a) En la figura 12.4 se muestra un triángulo equilátero. Si se inscribe en una circunferencia cuyo radio *r* mide 5.77 cm, ¿cuál es la longitud de la apotema? ______________
   b) En la figura 12.5 se observa un pentágono regular. Si se inscribe en una circunferencia cuyo radio *r* mide 8.51 cm, ¿cuál es la longitud de la apotema? ______________
   c) En la figura 12.6 se muestra un hexágono regular. Si se inscribe en una circunferencia de cuyo radio *r* mide 10 cm, ¿cuál es la longitud de la apotema? ______________

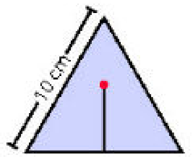


Figura 12.4 Triángulo equilátero

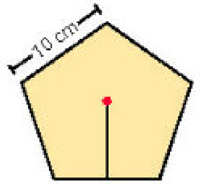


Figura 12.5 Pentágono regular

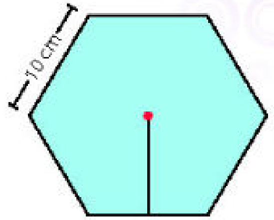
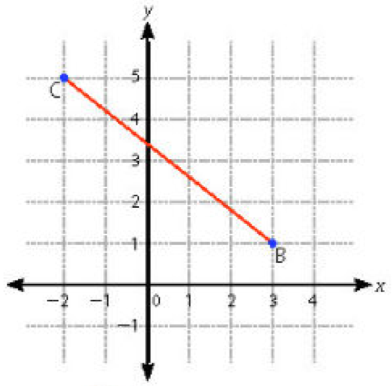
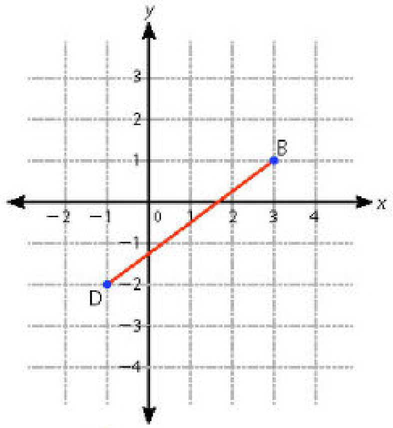


Figura 12.6 Hexágono regular

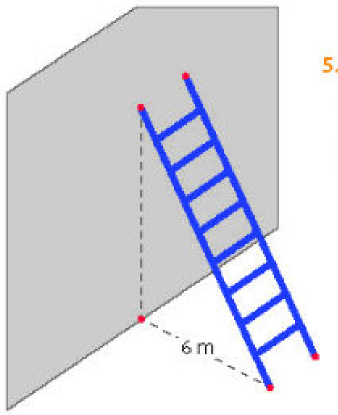
3. Un triángulo equilátero se inscribe en una circunferencia de radio $r = 6$ m. Calculen el lado del triángulo.
4. Calculen las longitudes de los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{DB}$ de las gráficas 12.1 y 12.2, respectivamente.



Gráfica 12.1 Segmento $\overline{CB}$



Gráfica 12.2 Segmento $\overline{DB}$



5. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada a 6 m de la base de la pared gris (figura 12.7). ¿Cuál es la distancia de la base de la pared al punto en que está apoyada la escalera? ______________

____

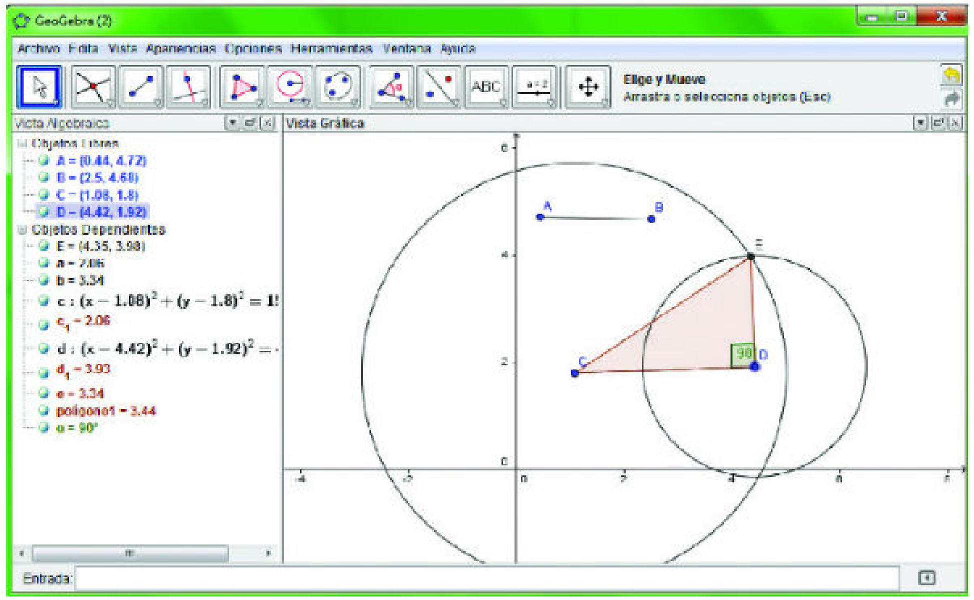
Figura 12.7 Escalera recargada en una pared

Reúnanse con otro equipo y comparen las soluciones de los problemas anteriores. Comenten sobre la aplicabilidad y utilidad del teorema de Pitágoras.

Uso de las TIC

- En equipos, resuelvan el problema 2 de la actividad 2 en el software GeoGebra. Lleven a cabo los siguientes pasos:
  - a) Marquen dos segmentos de cualquier medida que queden contenidos en la pantalla. En la figura 12.8 son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
  - b) Con la herramienta "Circunferencia dados su centro y radio", sexta ventana del menú, tracen un círculo con centro C y radio $\sqrt{(\overline{AB})^2 + (\overline{CD})^2}$. En GeoGebra, lo anterior se escribe así: (a^2 + b^2)^(1/2).
  - c) Con la herramienta "Compás", sexta ventana, señalen el segmento $\overline{AB}$ y tracen una circunferencia con centro en D. Indiquen el punto E de intersección de ambas circunferencias.
  - d) Tracen el triángulo CDE. Verifiquen que sea un triángulo rectángulo. Muevan el vértice D y vean que el triángulo sigue siendo rectángulo. Noten lo mismo moviendo el punto B.
  - e) Expliquen por qué lo observado apoya el teorema de Pitágoras inverso.

Figura 12.8 Construcción de un triángulo rectángulo a partir de dos lados



Repasa lo aprendido

Resuelve individualmente los problemas planteados.

1. Dos vías ferroviarias están en línea recta y son perpendiculares entre sí. Supón que el tren 1 viaja de norte a sur a una velocidad de 800 metros por minuto y el tren 2 va de este a oeste a una velocidad de 600 metros por minuto. En un momento dado el tren 1 está a 40 km al norte del punto donde se cruzan las vías ferroviarias, mientras que el tren 2 está a 50 km al este del cruce.

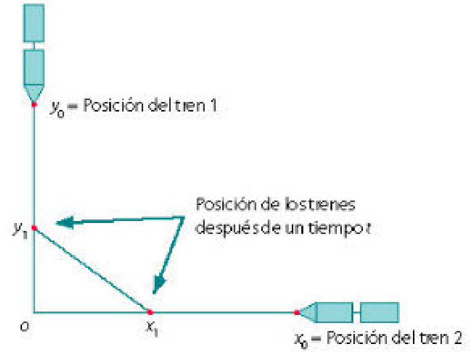


Figura 12.9 Diagrama del desplazamiento de los trenes sobre las vías ferroviarias

   a) ¿En cuántos minutos la distancia entre los dos trenes será de 4 100 m?

   b) Anota en el diagrama de la figura 12.9 los datos del problema.

2. Asigna t al número de minutos que transcurren a partir del momento en que el tren 1 está a 40 km al norte y el tren 2 está a 50 km al este. Con base en esto selecciona la respuesta correcta.

   a) La distancia del tren 1 al cruce en el tiempo t es:

      i) $\overline{y_1O} = 40 - 0.8t$ ii) $\overline{y_1O} = 0.8t - 40$ iii) $\overline{y_1O} = 40t - 0.8$

   [Nota: El número 0.8 se refiere a la velocidad del tren 1, que tiene como unidades $\frac{\text{metros}}{\text{minutos}}$.]

   b) La distancia del tren 2 al cruce en el tiempo t es:

      i) $\overline{x_1O} = 0.6t - 40$ ii) $\overline{x_1O} = 40t - 0.6$ iii) $\overline{x_1O} = 50 - 0.6t$

   [Nota: El número 0.6 se refiere a la velocidad del tren 2, que tiene como unidades $\frac{\text{metros}}{\text{minutos}}$.]

3. Si la distancia $\overline{x_1y_1}$ elevada al cuadrado entre los dos trenes en el tiempo t es:

$$(\overline{x_1y_1})^2 = (\overline{y_1O})^2 + (\overline{x_1O})^2$$

   a) Explica por qué se cumple la igualdad anterior.

   b) Sustituye las expresiones y resuélvela.

4. Desarrolla los binomios al cuadrado en la expresión del punto 3 y reduce la expresión a un polinomio.

5. ¿Cuál de las siguientes respuestas es la solución al problema?

   a) 100 minutos. b) 124 minutos. c) 80 minutos. d) Otra: ________

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Lleguen a un acuerdo sobre cuáles son correctas; si lo consideran necesario, revisen lo estudiado en esta lección. En grupo y con la guía de su maestro verifiquen que sus respuestas y conclusiones sean correctas.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Teorema de Pitágoras directo **Teorema de Pitágoras inverso**

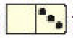
El alumno aprenderá a:
Calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Lección 13 Regla de la suma

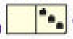
Problema de investigación

En parejas, lleven a cabo lo que se pide y respondan las preguntas.

- El dominó es un juego de mesa que consta de 28 fichas, cada una de las cuales está dividida en dos cuadrados marcados con un número de puntos que va de 0 a 6, como se muestra en la figura 13.1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha al azar se obtenga ? ______________

____

b) Si se saca otra ficha al azar de las que quedan, ¿qué evento hace que ocurra "Obtener una ficha que empate con "? ______________

____

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento del inciso *b*?

____

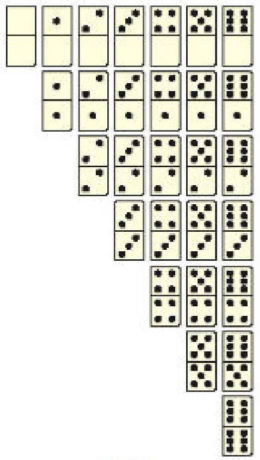


Figura 13.1

Dominó

Contrasten sus respuestas con las de otra pareja. Con base en la probabilidad, ¿se puede saber quién ganará el juego? Justifiquen su respuesta y con la ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre la respuesta correcta.

Eventos complementarios

En la lección 6 se inició el estudio del contenido de eventos complementarios. En esta lección se continuará con ello.

Actividad 1. Formen equipos de tres alumnos y respondan lo que se pide.

Problema. En un estudio estadístico, de cada 100 llamadas telefónicas que en promedio recibe un banco en un minuto, 50 llamadas son respondidas por una contestadora automática, 30 por un asesor telefónico y 20 no se responden.

Luis hace una llamada y espera la respuesta durante un minuto. Con base en el estudio estadístico, se tienen tres posibles resultados:

A: La contestadora automática responde la llamada.

B: Un asesor telefónico responde la llamada.

C: La llamada no es respondida.

Contesten con base en los eventos complementarios de A, B y C.

a) ¿Cuántas llamadas no son respondidas por la contestadora automática? ______________

b) ¿Cuántas llamadas no son respondidas por un asesor telefónico? ______________

c) ¿Cuántas llamadas son respondidas? ______________

d) Para representar los tres eventos complementarios utilicen, respectivamente, los símbolos A^c, B^c y C^c y obtengan las siguientes probabilidades.

i) $P(A^c) =$ ______ ii) $P(B^c) =$ ______ iii) $P(C^c) =$ ______

e) Calculen las sumas.

i) $P(A) + P(A^c) =$ ______ ii) $P(B) + P(B^c) =$ ______ iii) $P(C) + P(C^c) =$ ______

f) Escriban una proposición que exprese lo observado en las probabilidades de los incisos *d* y *e*. ______________

____

Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Analicen si la proposición que formularon es una ley, es decir, si se cumple en todos los casos.

Propongan algún ejemplo de una situación aleatoria y dos eventos que sean complementarios.

Actividad 2. En parejas, respondan lo que se pide.

Problema. Consideren la experiencia de lanzar un volado. Indiquen con A el resultado "Cae águila" y con S el resultado "Cae sol".

a) Si se repite el experimento dos veces (es decir, si se lanza una moneda dos veces), enlisten todos los posibles resultados. ______________

____

b) Escriban los eventos complementarios de los siguientes eventos.

i) A: Que salgan 0 águilas. A^c: ______________

ii) B: Que salga 1 águila. B^c: ______________

iii) C: Que salgan 2 águilas. C^c: ______________

c) Calculen la probabilidad de cada evento.

i) $P(A) =$ ______ $P(A^c) =$ ______

ii) $P(B) =$ ______ $P(B^c) =$ ______

iii) $P(C) =$ ______ $P(C^c) =$ ______

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten los procedimientos que siguieron para calcular el evento complementario. ¿Lo hicieron de la misma manera? ______________ ¿Qué procedimiento es más directo? ______________ ¿Utilizaron la regla general para eventos complementarios? ______________

Problemas

Formen equipos para resolver los problemas.

Con base en el juego de dominó del "Problema de investigación", consideren el experimento de sacar una ficha al azar del conjunto de fichas.

a) Propongan dos eventos complementarios.

b) Señalen cuáles de los siguientes eventos son complementarios.

- i) La suma de sus puntos es menor que 7.
- ii) La suma de sus puntos es mayor o igual a 7.
- iii) La suma de sus puntos es igual a 7.
- iv) La suma de sus puntos es mayor que 7.
- v) La suma de sus puntos es menor o igual a 7.
- vi) La suma de sus puntos no es igual a 7.

c) A partir de la respuesta del inciso *b*, calculen la probabilidad. ______________

d) ¿Qué observan en las probabilidades de los eventos complementarios? ______________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Argumenten y verifiquen que los eventos que propusieron sean efectivamente complementarios.

Eventos mutuamente excluyentes

Actividad 3. En equipos, hagan en su cuaderno lo que se pide.

Problema. En un hospital un médico atiende tres partos al día. La probabilidad de que en un parto el recién nacido sea niña o niño es de $\frac{1}{2}$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día, de los tres recién nacidos, el primero sea niña y los otros dos niños o el tercero sea niña y los otros dos niños? ______________

b) Hagan una lista de todos los posibles resultados de los tres nacimientos; utilicen M para indicar el nacimiento de una niña y H para el de un niño. Pueden elaborar un diagrama de árbol.

c) Calculen la probabilidad para cada uno de los siguientes eventos:

i) N_1: El primer nacimiento es niña y los otros dos niños. $P(N_1)$ = ______________

ii) N_3: El tercer nacimiento es niña y los otros dos niños. $P(N_3)$ = ______________

d) Llamen $N_1 \cup N_3$ al evento "El primero es niña y los otros dos niños o el tercero es niña y los otros dos niños". Calculen: $P(N_1 \cup N_3)$ = ______________

e) ¿Qué relación hay entre $P(N_1)$, $P(N_3)$ y $P(N_1 \cup N_3)$? Escribe la igualdad que los relaciona. ______________

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Analicen la relación y lleguen a un acuerdo sobre la que la describa mejor.

Problemas

De manera individual resuelve el siguiente problema.

En cada visita que hace un vendedor de seguros a un cliente potencial, tiene los siguientes eventos con sus respectivas probabilidades.

A: Hacer una venta de una póliza completa.	$P(A) = 0.3$
B: Hacer una venta de una póliza parcial.	$P(B) = 0.3$
C: Concertar una nueva cita.	$P(C) = 0.2$
D: No lograr nada con la visita.	$P(A) = 0.2$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita realice una venta completa o parcial? Escribe la respuesta en forma simbólica. ______________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita concierte otra cita o no logre nada? Escribe la respuesta en forma simbólica. ______________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita no venda una póliza completa? Escribe la respuesta en forma simbólica. ______________

Regla de la suma

En las actividades que acaban de hacer está presente el concepto de eventos mutuamente excluyentes. Escriban la definición de eventos mutuamente excluyentes, revisen —si es necesario— la lección 6. ______________

Utilicen este concepto para llevar a cabo la actividad 4.

Actividad 4. En equipo, respondan las preguntas que se plantean.

Problema 1. Se lanza un dado y se observa qué número cae. Para los incisos *a-c* hay dos eventos, escriban una ✓ en "Sí" cuando ocurren ambos eventos y una ✕ en "No" cuando ocurre uno, pero no ocurre el otro. Justifiquen su respuesta.

a) A: Obtener un número 2 o 3. B: Obtener un número 1, 5 o 6.

Sí ________. No ________. ¿Por qué? ______________

b) A: Obtener un número 2 o 3. C: Obtener el número 4.

Sí ________. No ________. ¿Por qué? ____________________

c) B: Obtener un número 1, 5 o 6. C: Obtener el número 4.

Sí ________. No ________. ¿Por qué? ____________________

d) Consideren los eventos A, B y C de los incisos anteriores y calculen las probabilidades de cada uno.

i) P(A) = ________ ii) P(B) = ________ iii) P(C) = ________

e) Para cada uno de los siguientes eventos calculen la probabilidad.

i) A∪B: Ocurre A o B. Calculen P(A∪B) = ________

ii) A∪C: Ocurre A o C. Calculen P(A∪C) = ________

iii) B∪C: Ocurre B o C. Calculen P(B∪C) = ________

f) ¿Cuál es la relación de las probabilidades del inciso *e* con las probabilidades del inciso *d*?

____

Problema 2. El equipo de Karla calculó la P(A∪B) del inciso *e*. Completen lo que falta en cada inciso.

a) Enlisten dentro de las llaves los elementos del espacio muestral.

{ }

b) Determinen y enlisten los elementos de los eventos A y B.

A = { } y B = { }

c) Determinen y enlisten el evento *A∪B*.

A∪B = { }

d) Calculen P(A∪B) = ________

Reúnanse con otro equipo y comparen las respuestas de esta actividad. Contrasten su procedimiento con el que realizó el equipo de Karla. ¿Qué similitudes o diferencias encuentran? ____________________. Analicen los diferentes procedimientos para calcular la probabilidad de la unión de dos eventos. ¿Se puede entender un procedimiento (por ejemplo, aplicar la regla de la suma) sin entender el otro (hacer listados)?

Las actividades y los problemas anteriores permiten formular la siguiente regla:

Regla de la suma de probabilidades

Dado un experimento aleatorio, si A y B son dos eventos **mutuamente excluyentes** entonces **P(A∪B) = P(A) + P(B).**

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. Se saca una ficha de dominó al azar y se observan los puntos de cada cara. Considera los eventos representados por las fichas de la figura 13.2.

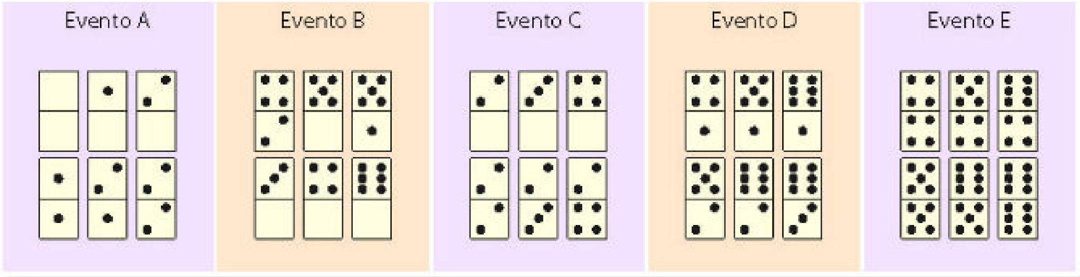


Figura 13.2 Eventos al azar

a) Escribe las parejas de eventos que son mutuamente excluyentes y las que no lo son. ________

b) Calcula la probabilidad de la unión de las parejas de eventos mutuamente excluyentes. ________

c) Calcula la probabilidad de la unión de las parejas que no son mutuamente excluyentes. ¿Se cumple que la probabilidad de la unión de dos eventos es la suma de las probabilidades de cada uno? Justifica tu respuesta.

____

____

2. Un cañón de artillería en condiciones óptimas de operación tiene los siguientes eventos con sus respectivas probabilidades.

L: Pegar exactamente en el blanco destruyéndolo por completo. P(L) = 0.5

M: Estallar a menos de un metro del blanco sin pegarle, pero causándole daño. P(M) = 0.2

N: Estallar entre uno y tres metros del blanco causando daños menores. P(N) = 0.2

O: Estallar a más de tres metros sin causar daño. P(O) = 0.1

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un disparo destruya completamente el blanco o le cause daño mayor? Escribe la respuesta en forma simbólica. ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el disparo estalle a menos de tres metros, pero sin hacer impacto en el blanco? Escribe la respuesta en forma simbólica. ________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el disparo no se impacte exactamente en el blanco? Escribe la respuesta en forma simbólica. ________

3. Se lanza una moneda y se tienen los siguientes eventos:

A: Cae águila. S: Cae sol. A∪S: Obtener águila o sol.

a) Calcula las probabilidades de cada evento. ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila o sol? ______

4. Se lanza un dado y se observan los puntos que salen. María apuesta al evento P: "Sale un número par" y Juan apuesta al evento I: "Sale un número impar". ¿Cuál es la probabilidad de que gane María o de que gane Juan?

Completa lo siguiente: $P(P \cup I) =$ ______

5. Ofrece argumentos para establecer la veracidad de la siguiente proposición:

> **Evento A y su complementario A^c**
>
> Un evento A y su complementario A^c satisfacen que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Contrasten sus respuestas con las de otros compañeros. Con la guía de su maestro revisen los argumentos que dieron para comprobar la proposición.

Glosario

Los conceptos para agregar al glosario son:

Eventos mutuamente excluyentes | **Eventos complementarios**

Evento seguro | **Regla de la suma de probabilidades**

Evaluación

Lee cada situación y elige la respuesta correcta.

Situación 1. Para cada uno de los enunciados, selecciona la expresión algebraica que lo representa.

1. Un terreno rectangular tiene 120 m² de área y su perímetro es de 46 m. ¿Cuál es el ancho del terreno?

   a) $x^2 - 23x = 50$ b) $x^2 - 23x + 120 = 0$ c) $x^2 + 23x = 1\,200$ d) Otra

   (a) (b) (c) (d)

2. Un terreno rectangular de ancho x se puede dividir en un cuadrado de lado x y un rectángulo del mismo ancho y de largo igual a 23 m. El área del terreno completo es 1 200 m². ¿Cuál es el ancho del terreno?

   a) $x^2 - 23x = 50$ b) $x^2 - 23x + 120 = 0$ c) $x^2 + 23x = 1\,200$ d) Otra

   (a) (b) (c) (d)

3. De un terreno cuadrado se obtiene un terreno rectangular quitándole 8 m de largo y 15 m de ancho. Si el nuevo terreno tiene un área de 170 m², ¿cuál es la longitud del terreno rectangular resultante?

   a) $x^2 - 23x = 50$ b) $x^2 - 23x + 120 = 0$ c) $x^2 + 23x = 1\,200$ d) Otra

   (a) (b) (c) (d)

4. Con la expresión algebraica que elegiste, ¿cuál es la solución del enunciado del punto 1?

   a) $x = 17$ b) $x = 25$ c) $x = 8$ d) Otra

   (a) (b) (c) (d)

5. Tomando la expresión algebraica que elegiste, ¿cuál es la solución del enunciado del punto 2?

   a) $x = 17$ b) $x = 25$ c) $x = 8$ d) Otra

   (a) (b) (c) (d)

6. Con base en la expresión algebraica que elegiste, ¿cuál es la solución del enunciado del punto 3?

   a) $x = 17$ b) $x = 25$ c) $x = 8$ d) Otra

   (a) (b) (c) (d)

Situación 2. Observa los polígonos de la figura E2.1 y responde las preguntas que se plantean.

7. ¿Qué transformaciones se utilizan para obtener el polígono P' a partir de P y el polígono Q' a partir de Q, respectivamente?

   a) Una reflexión para cada caso
   b) Una traslación para P y una rotación para Q
   c) Una reflexión para P y una traslación para Q
   d) Ninguna de las anteriores

   (a) (b) (c) (d)

8. ¿Qué propiedad o propiedades de P conserva P'?

a) Orientación
b) Medidas de todos los ángulos interiores
c) Medidas de todos los lados
d) Ninguna de las anteriores

9. ¿Qué propiedad o propiedades de Q conserva Q'?

a) Orientación
b) Medidas de todos los lados
c) Medidas de todos los ángulos interiores
d) Ninguna de las anteriores

10. Para obtener de nuevo P como imagen de P' es necesario aplicarle:

a) Una reflexión sobre la mediatriz del segmento que une A y B
b) Una traslación hacia arriba en la dirección y el tamaño del vector que une A y B
c) Una rotación con centro O en la intersección de las mediatrices de $\overline{AB}$ y otro segmento que una un par de puntos correspondientes con ángulo BOA
d) Una rotación de 180° con centro en el punto medio del segmento que une A y B

11. Para obtener de nuevo Q como imagen de Q' es necesario aplicarle:

a) Una reflexión sobre una recta horizontal que pase por la mediatriz del segmento $\overline{XY}$
b) Una traslación hacia la izquierda en la dirección y el tamaño del vector que une X y Y
c) Una rotación de 180° sobre el punto X y luego una traslación vertical
d) Una rotación con centro O en la intersección de las mediatrices de $\overline{XY}$ y otro par de puntos correspondientes y con ángulo YOX

Situación 3. Subraya las medidas que corresponden a los lados de triángulos rectángulos.

a) 3, 4, 5
b) 10, 24, 26
c) 3, 7, 11
d) 6, 7, 9
e) 5, 8, 10
f) 9, 13, 17
g) 5, 12, 13
h) 4, 4, 6

Situación 4. Un bombero debe entrar por la ventana de un edificio. Si la ventana está a 15 m del suelo y coloca la escalera a 6 m de la pared, ¿cuánto mide aproximadamente la escalera?

a) 21 m
b) 16 m
c) 9 m
d) Otra

Situación 5. En cada visita que hace un vendedor de libros a un cliente potencial, tiene los siguientes eventos con sus respectivas probabilidades.

A: Vender un libro científico, P(A) = 0.1
B: Vender un libro de arte, P(B) = 0.2
C: Vender un diccionario, P(C) = 0.4
D: No vender nada, P(D) = 0.3

12. ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita venda al menos un libro de cualquier tipo o un diccionario?

a) 0.7
b) 0.5
c) 0.3
d) 0.1

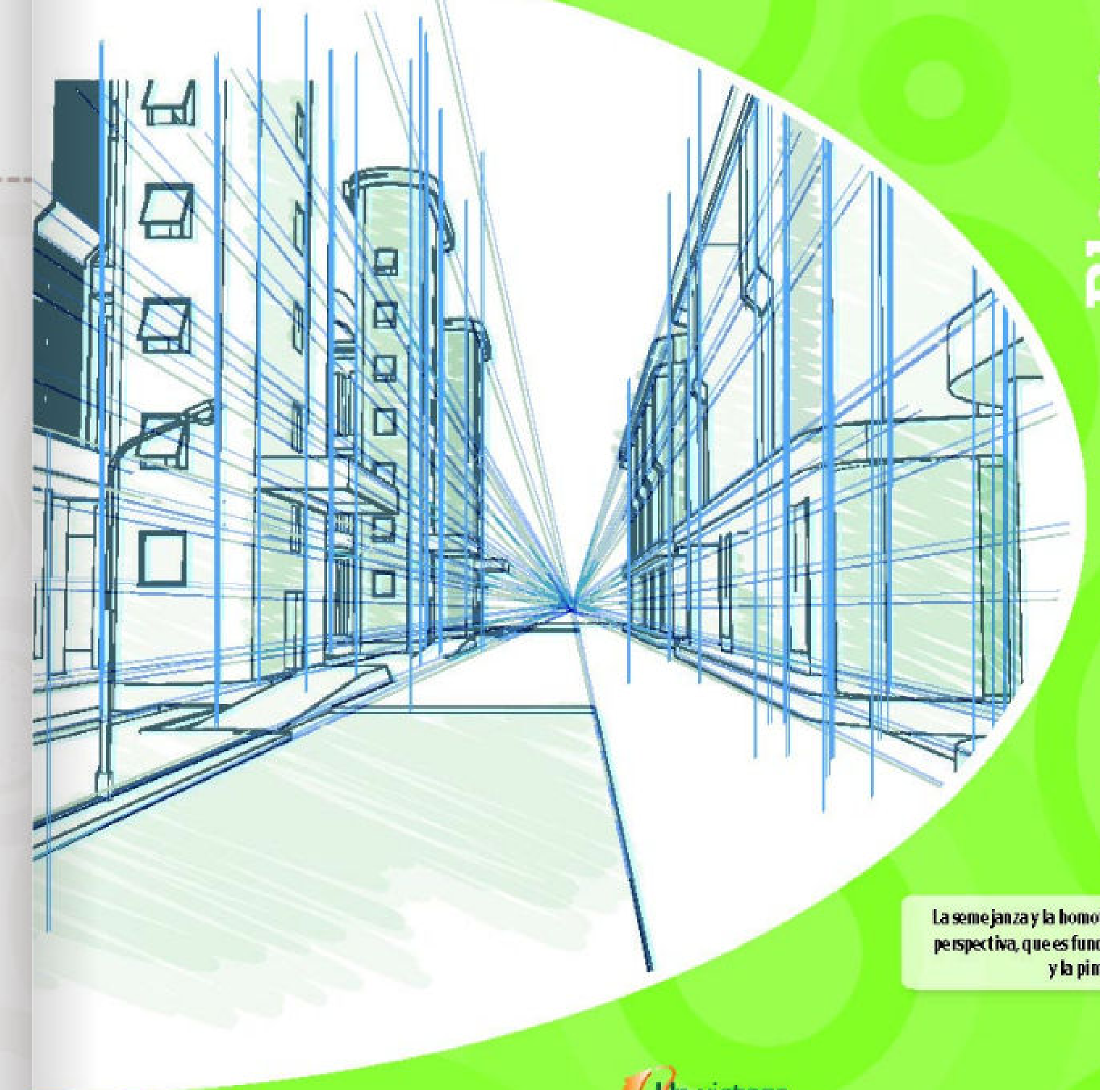
13. ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita venda un libro de arte o un diccionario?

a) 0.2
b) 0.4
c) 0.6
d) 0.8

14. ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita no venda un diccionario?

a) 0.2
b) 0.4
c) 0.6
d) 0.8

Bloque 3



La semejanza y la homotecia son la base de la perspectiva, que es fundamental en el dibujo y la pintura.

Un vistazo

En este bloque utilizarás la fórmula general de segundo grado para resolver problemas que se obtienen mediante una ecuación cuadrática. Se estudian también algunas situaciones modelables con funciones cuadráticas y en las que pueden plantearse problemas que se resuelven analizando tales funciones. Se prosigue con el tema de congruencia y semejanza para establecer criterios que permiten detectar estas propiedades de manera económica. Se introduce y analiza el teorema de Tales, que articula el estudio de la semejanza. Se trabaja con las gráficas cartesianas formadas por pedazos de gráficas de funciones lineales y cuadráticas; esto amplía el rango de situaciones que pueden ser modeladas con las matemáticas. Se continúa con el estudio de la probabilidad, en el que un criterio determina cuándo dos eventos son independientes.

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados
Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Lección 14 Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

El alumno aprenderá a: Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. La aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Problema de investigación

De manera individual haz lo que se pide.

- La arista de un cubo es 2 cm mayor que la arista de otro cubo y el volumen de los cubos difiere en 218 cm³. ¿Cuánto miden las aristas de ambos cubos?
  - a) ¿Cuál es la incógnita? Escribe la ecuación correspondiente. ______
  - b) Formula la ecuación que relaciona los volúmenes de los dos cubos. ______
  - c) Escribe en tu cuaderno los pasos para simplificar la ecuación y llevarla a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
  - d) Resuelve la ecuación que responde la pregunta planteada.

En parejas comparen su respuesta. Si utilizaron más de un procedimiento determinen cuál o cuáles les parecen más eficaces.

Si cambian uno o más datos del problema, ¿el procedimiento que eligieron sigue siendo eficaz? ¿Por qué?

Problemas que se resuelven mediante una ecuación cuadrática

Actividad 1. En parejas, respondan las preguntas que se plantean en el siguiente problema.

Problema. Para cercar un terreno rectangular cuya área mide 750 m² se utilizaron 110 m de malla electrosoldada. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

a) Formulen la ecuación que relaciona el perímetro del terreno. ______

b) ¿Cuál es la ecuación que se relaciona con el área del terreno? ______

c) Escriban la ecuación cuadrática que combina estas dos ecuaciones. ______

d) Resuelvan la ecuación cuadrática que obtuvieron y escriban el resultado. ______

Reúnanse con otra pareja, contrasten sus respuestas y las operaciones algebraicas que hicieron para llegar a la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Expliquen qué procedimiento realizaron para simplificar la ecuación. Verifiquen que la ecuación cuadrática que obtuvieron sea igual a la de la otra pareja. En caso necesario, pidan ayuda al maestro y entre todos lleguen a una sola conclusión.

Solución general a la ecuación de segundo grado

Fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado

Una manera de resolver ecuaciones de segundo grado es por medio de la **fórmula general**. Una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, tiene dos soluciones dadas por las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

Actividad 2. En equipos, lleven a cabo lo que se solicita. Utilicen calculadora para efectuar las operaciones.

Problema. Resuelvan la ecuación $4x^2 - 28x + 45 = 0$ utilizando las fórmulas (1) y (2) del recuadro "Fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado".

a) ¿Cuáles son los valores de a, b y c para la ecuación?

a = ______, b = ______, c = ______.

b) Sustituyan los valores del inciso a en las ecuaciones (1) y (2) del recuadro de definición.

c) Realicen las operaciones y encuentren los valores de las dos soluciones.

d) Sustituyan cada solución en la ecuación $4x^2 - 28x + 45 = 0$ y verifiquen que se cumpla la igualdad.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Analicen la importancia de saber interpretar y operar los signos (positivo y negativo) en la fórmula para evitar errores.

Comparen sus procedimientos y lleguen a un acuerdo sobre cuál o cuáles son más eficaces.

Problemas

En equipos de tres alumnos, resuelvan los siguientes problemas planteando la ecuación y utilizando la fórmula general para hallar la solución. Efectúen las operaciones con una calculadora.

1. El producto de dos números consecutivos es igual a 240.
   - a) ¿Cómo se representan dos números enteros consecutivos? ______
   - b) ¿Cuáles son esos números? ______
2. Dos números suman 20 y la suma de sus cuadrados es 272. ¿Cuáles son estos números?

3. Un parque rectangular mide 40 m × 60 m y está rodeado por una calle de ancho uniforme cuya área es igual a la del parque, como se muestra en la figura 14.1. ¿Cuál es el ancho de la calle?

4. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 3 m más que el otro cateto. Si el área del triángulo es de 135 m², ¿cuáles son las longitudes de los catetos?

Figura 14.1 Representación del parque rodeado por la calle

Reúnanse con otro equipo y comparen tanto las ecuaciones que plantearon como las soluciones de los problemas anteriores.

Si no coinciden, revisen y argumenten sus procedimientos. Con la ayuda del maestro lleguen a un acuerdo sobre las soluciones correctas.

Llenado de un recipiente

Si una llave vierte agua uniformemente a un recipiente como el que se muestra en la figura 14.2, se cumple la ecuación: $V = v \times t$

Figura 14.2 Recipiente esférico

Donde V es el volumen del recipiente, v la velocidad de llenado y t el tiempo que tarda en llenarse el recipiente.

Actividad 3. Formen equipos y hagan lo que se pide.

Problema. Para llenar un tinaco se utilizan dos llaves de agua (A y B). La llave A tarda en llenarlo 150 segundos menos que la llave B y entre las dos llaves llenan el tinaco en 180 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará cada llave en llenar el tinaco?

a) Si Q es la capacidad total del tinaco y x el tiempo que tarda en llenarse con la llave A, ¿cuánta agua entra por segundo? __________

b) Si Q es la capacidad total del tinaco y y el tiempo que tarda en llenarse con la llave B, ¿cuánta agua entra por segundo? __________

c) Con base en el enunciado, ¿cuál es la ecuación que relaciona x y y? __________

d) ¿Cuánta agua entra con las dos llaves? __________

Reúnanse con otro equipo y relacionen adecuadamente las expresiones anteriores. Organicen y simplifiquen para obtener una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Comenten el hecho de que una situación con funciones lineales (como el llenado uniforme de recipientes) dé lugar a una ecuación cuadrática.

Problemas

Resuelvan los problemas propuestos de manera individual.

1. Una ecuación de la física establece que la distancia d (en metros) recorrida por un cuerpo en caída libre es $d = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, donde v_0 es la velocidad inicial del cuerpo (en $\frac{m}{s}$), t es el tiempo que tarda en caer el cuerpo (en segundos) y g la aceleración constante ejercida por la fuerza de gravedad (en $\frac{m}{s^2}$). Calcula el tiempo que necesita un cuerpo para descender 500 m en el vacío si la velocidad inicial es de $20 \frac{m}{s}$ y $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$.
2. Formula un problema de llenado de recipientes en el que la solución se encuentre mediante una ecuación cuadrática y resuélvelo.

Reúnete con otros dos compañeros y comparen los procedimientos que utilizaron y las respuestas obtenidas.

Explique cada quien el método para formular el problema de recipientes. Intercambien los problemas que plantearon y resuélvanlos. Comparen sus procedimientos y utilicen el que les parezca más práctico.

Análisis del discriminante

Revisa de nuevo las ecuaciones (1) y (2) del recuadro "Fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado", página 117. La expresión que está dentro de la raíz cuadrada $\sqrt{b^2 - 4ac}$ se denomina discriminante, es decir, el discriminante es:

Ley de tricotomía

Dado un número x cualquiera (entero, decimal, fraccionario), sólo se cumple una de estas tres condiciones:

$x > 0$ $\quad x = 0$ $\quad x < 0.$

Reúnete con dos compañeros y expliquen con sus propias palabras lo que significa el enunciado de la ley de tricotomía y escriban un ejemplo. __________

Actividad 4. Formen parejas y lleven a cabo lo que se solicita en cada inciso.

Problema. Con base en la ley de tricotomía respondan lo siguiente.

a) ¿Qué opciones tiene el discriminante $b^2 - 4ac$?

______________ ______________ ______________

b) ¿Cuál es el valor del discriminante en cada una de las ecuaciones?

i) $x^2 - 9x + 20 = 0$ ii) $x^2 - 6x + 9 = 0$ iii) $x^2 - 4x + 6 = 0$

c) Encuentren las raíces de las ecuaciones del inciso *b* con la fórmula general. (Recuerden que no existe la raíz cuadrada de los números negativos.) ¿Qué observan? ______________

____

d) Escriban qué ocurre respecto al discriminante y al número de raíces. ______________

____

Reúnanse con otra pareja y expongan de manera clara las ideas matemáticas sobre la relación entre el discriminante y el número de raíces de una ecuación.

Uso de las TIC

En equipos, realicen lo que se solicita.

1. Con base en la ecuación unitaria $x^2 + bx + c = 0$, respondan:
   a) ¿Para qué valores enteros de *b* y *c* la ecuación tiene dos soluciones?
   b) ¿Para qué valores tiene una sola solución?
   c) ¿Para qué valores no tiene ninguna solución?
2. La actividad se restringirá a valores de *b* y *c* entre -5 y 5. Cuando en una ecuación de segundo grado el coeficiente del término cuadrático es 1 se dice que es unitaria. En este caso, $a = 1$ y el discriminante es $b^2 - 4c = 0$.
   a) Usando una hoja de cálculo se pueden explorar los valores del discriminante para los diferentes valores de *b* y *c* entre -5 y 5. Observa los cálculos de las primeras celdas. Con estos resultados completen la tabla 14.1.

Tabla 14.1. Valores para *b* y *c* en una ecuación unitaria

c \ *b*	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
−5	45	36									
−4											
−3											
−2											
−1											
0											
1											

Tabla 14.1. Valores para *b* y *c* en una ecuación unitaria

c \ *b*	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
2											
3											
4											
5											

b) Con los valores de la tabla 14.1 propongan dos ecuaciones unitarias de segundo grado cuyos coeficientes estén entre -5 y 5. Escriban si tiene una o dos soluciones, o ninguna solución. ______________

____

____

c) Propongan tres ecuaciones unitarias de segundo grado con coeficientes entre -5 y 5 de manera que tengan una o dos soluciones, o ninguna solución, respectivamente. ______________

____

____

d) Hagan lo necesario para ampliar la exploración de los valores de *b* y *c* entre -10 y 10. ¿Hay algún patrón en la tabla 14.1 que los ayude a saber el comportamiento para esos valores?

Reúnanse con otro equipo y comenten sus observaciones. A partir de los resultados encontrados, lleguen a una conclusión sobre cómo se obtienen las soluciones de las ecuaciones unitarias de segundo grado.

Problemas

En parejas, resuelvan lo que se pide.

1. ¿Cuál es el valor de *k* para que las siguientes ecuaciones de segundo grado tengan una sola raíz? Calculen la raíz.

   a) $kx^2 - 4x + 1 = 0$ b) $kx^2 + 8x + 4 = 0$
2. Para qué valores de *k* la ecuación $2x^2 - 4x + k = 0$ tiene:
   a) Exactamente dos raíces.
   b) Exactamente una raíz (también se dice que tiene raíz doble).
   c) Ninguna raíz.
3. Una raíz de la ecuación $x^2 + kx - 2 = 0$ es $x_1 = 1$. Encuentren el valor de *k* y el de la otra raíz.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten cuál es la importancia del discriminante para conocer la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

Repasa lo aprendido

Resuelve individualmente los siguientes problemas y escribe el procedimiento en tu cuaderno.

1. Resuelve el "Problema de investigación" del inicio de la lección y compara tus resultados. Si cometiste algunos errores, corrígelos.
2. Luis es el encargado de un parque de forma rectangular cuyo largo mide 7 m más que el ancho. En los archivos encontró que un topógrafo había medido la diagonal del parque, cuya longitud es de 97 m. Con esta información Luis determinó las dimensiones del parque.
   a) ¿Cómo obtuvo las medidas? ______
   b) Encuentra las dimensiones del parque. ______
3. Encuentra dos números cuya suma sea 12 y el producto 35.
4. Para llenar un tinaco se usan dos llaves. Con la primera llave se tarda 5 minutos más en llenarlo que con la segunda. Las dos llaves juntas lo llenan en 6 minutos. ¿Cuánto tarda en llenarlo cada llave?
5. Sin hacer operaciones con lápiz y papel, ¿cómo es el discriminante en cada una de estas ecuaciones de segundo grado: positivo, negativo o igual a cero?

   i) $x^2 - x + 2 = 0$ ii) $x^2 - x - 2 = 0$ iii) $x^2 - x + 0.25 = 0$

   Discriminante: ______   Discriminante: ______   Discriminante: ______

Reúnete con un compañero y comparen tanto sus procedimientos como los resultados.

Escriban qué sucede cuando el discriminante es positivo, negativo o igual a cero. ¿Puede ser útil esta información para encontrar las raíces?

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Ecuación cuadrática **Ley de tricotomía** **Fórmula general de la ecuación de segundo grado**

Discriminante

Lección 15 Congruencia y semejanza II

El alumno aprenderá a: Aplicar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Problema de investigación

De manera individual haz lo que se pide.

- Joanna y Carla deben verificar la altura de un poste de luz con tecnología LED. Carla le pregunta a su jefa: "¿Cómo vamos a medir la altura del poste si no traemos escalera corrediza ni ninguna clase de equipo?"

  Joanna le contesta:

  —¡Claro que traemos el equipo necesario: un espejo y una cinta métrica! Te voy a explicar cómo usarlos —dice Joanna al tiempo que hace lo que le va explicando a su asistente.

  A cierta distancia del poste, Joanna coloca un espejo en el piso y se aleja unos metros del espejo de tal manera que, desde donde se ubique, pueda verse —dirigiendo la vista al espejo— la punta del poste. Luego le pide a Carla que mida la distancia que separa a Joanna del lugar del reflejo en el espejo y la distancia de éste a la base del poste; tales distancias miden 2.5 m y 15.7 m, respectivamente. Si Joanna tiene una estatura de 1.62 m, ¿cómo determinarías la altura del poste de luz?

  a) Dibuja una representación gráfica del problema.
  b) Identifica los triángulos semejantes y justifica por qué son semejantes.
  c) Aplica un criterio de semejanza para obtener la altura del poste.

Reúnete con dos compañeros y comenten si pueden utilizar el espejo, como se explicó en este problema, para estimar la altura de un poste o de un edificio de su entorno. Háganlo.

Dos problemas de congruencia

La identificación de triángulos congruentes permite resolver problemas que consisten en encontrar una magnitud desconocida poco accesible o imposible de calcular directamente; no obstante, se puede determinar de manera indirecta.

Actividad 1. En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

Problema 1. En la figura 15.1, se muestran dos puntos opuestos de una laguna que está en una llanura. Supongan que sólo se cuenta con una cinta métrica larga, estacas y un cordel, y se quiere conocer la distancia entre los dos puntos, pero no es posible medirla directamente porque no se tiene una lancha para meterse al agua.

a) ¿Cómo se puede llevar a cabo la medición?

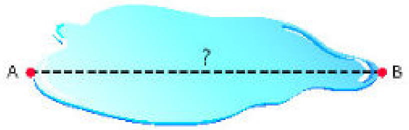


Figura 15.1
Laguna

b) En la figura 15.2 se determinaron los puntos *A'* y *B'* de modo que *A*, *C* y *A'* están alineados y $\overline{AC} = \overline{CA'}$; *B*, *C* y *B'* también están alineados y $\overline{BC} = \overline{CB'}$. Expliquen cómo se pueden hacer esos trazos con el material disponible.

c) ¿Cómo se obtiene la longitud de $\overline{AB}$? Justifiquen su respuesta.

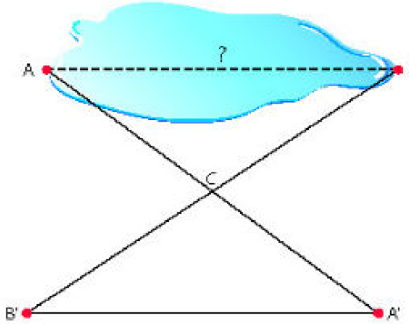


Figura 15.2
Representación de la longitud de la laguna con triángulos

Problema 2. Un parque está formado por tres secciones como se muestra en la figura 15.3. El prado corresponde al triángulo *ABC*, el arenero está formado por el triángulo equilátero *APB*, con el punto *P* fuera del triángulo *ABC* y la zona de juegos está representada por el triángulo equilátero *ACQ*, donde *Q* está fuera del triángulo *ABC*.

a) Se desea extender dos cables: uno del punto *P* a *C* y otro del punto *B* a *Q*. Si la distancia del punto *P* a *C* es de 120 m, ¿qué distancia hay del punto *B* a *Q*?

b) Con base en la descripción del problema, escriban en la figura 15.3 los nombres de los vértices *A*, *B*, *C*, *P* y *Q* donde corresponda.

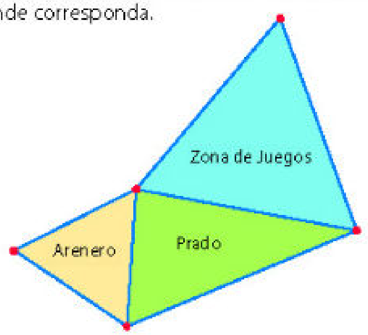


Figura 15.3
Secciones de un parque

c) Señalen los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{BQ}$. ¿Qué relación hay entre estos segmentos? ¿Por qué? ____

____

¿Qué criterio de congruencia utilizaron? ________________________

____

d) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{BQ}$? ________________________

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre el criterio que garantiza que los triángulos son congruentes.

Actividad 2. En parejas, respondan lo que se pide; usen un juego de geometría.

Problema. Poder trazar las bisectrices de ángulos es útil para resolver algunos problemas, por ejemplo, si se quiere encontrar el centro de un círculo dado.

Encuentren la bisectriz del ángulo formado por dos rectas que se intersecan.

a) Utilizando sólo regla y compás, tracen en su cuaderno cualquier ángulo y su bisectriz. Justifiquen su respuesta.

b) En los diagramas de la figura 15.4, se muestra la secuencia de trazos para construir la recta $\overline{BQ}$ que es la bisectriz del $\measuredangle FBG$. Completen la descripción de la construcción y la justificación de que la recta $\overline{BQ}$ es bisectriz del ángulo $\measuredangle GBF$.

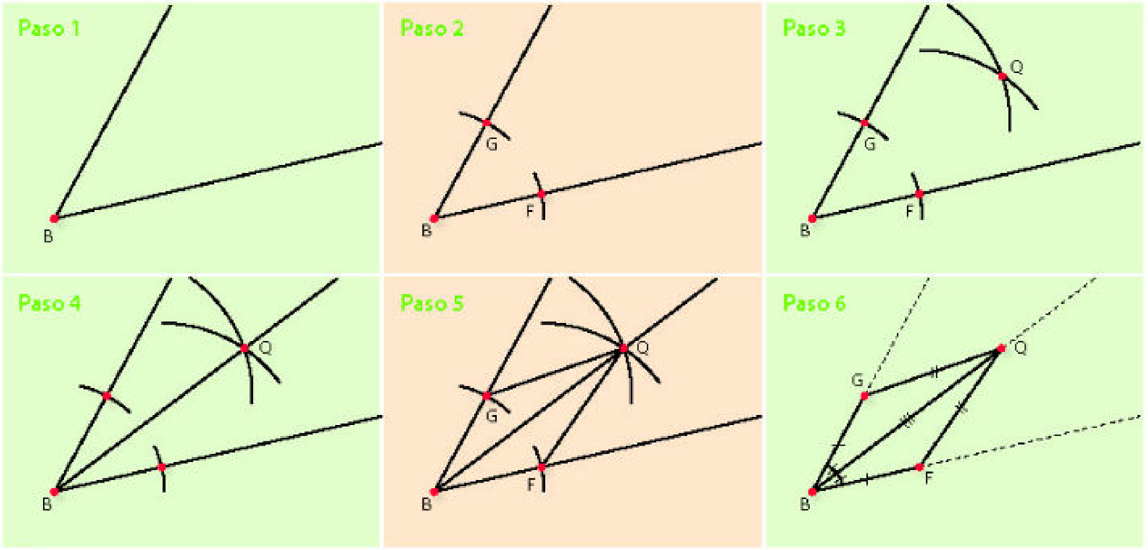


Figura 15.4
Construcción de la recta $\overline{BQ}$

Observando la figura 15.4, los pasos para trazar la bisectriz del ángulo formado por dos rectas que se intersecan son:

Paso 2: ________________________

Paso 3: ________________________

Paso 4: ________________________

Paso 5: ________________________

Paso 6: $\overline{BQ}$ es ____________ del $\measuredangle GBF$ porque ____________

____

c) Comparen la construcción que hicieron en su cuaderno (inciso *a*) con la de la figura 15.4. ¿En qué son similares? ¿Cuáles son las diferencias?

Reúnanse con otra pareja y elijan la construcción que les parezca más clara. Elaboren algunas láminas con las que puedan exponer ante sus compañeros de grupo las ideas que desarrollaron.

Expliquen el método para encontrar la bisectriz de un ángulo y la justificación de que la recta encontrada es efectivamente la bisectriz. Cuando todos los equipos hayan pasado evalúen las presentaciones en cuanto a claridad de la exposición y calidad de las láminas.

Criterios de semejanza de triángulos

En la lección 2 ("Congruencia y semejanza") se explicitó cuándo dos polígonos son semejantes. Escribe la definición.

En la lección 3 ("Propiedades de figuras congruentes y semejantes") se estudió que, para verificar que dos triángulos son semejantes, no es necesario constatar que todos los lados sean proporcionales ni que todos los ángulos sean congruentes. Es suficiente con una elección de tales elementos.

Usa los criterios de semejanza estudiados para resolver los siguientes problemas.

Problemas

En equipos, apliquen el criterio de semejanza conveniente y resuelvan los problemas en su cuaderno.

1. A cierta hora del día, un edificio proyecta una sombra de 50 m; al mismo tiempo la sombra de Alberto mide 2.8 m. Si la altura de Alberto es de 1.55 m, ¿cuál es la altura del edificio?
2. María quiere conocer la altura de una montaña. Para este propósito, utiliza una garrocha que entierra en forma vertical y queda a una altura de 4 m sobre el nivel del piso; luego se sitúa de tal manera que sus ojos, la punta superior de la garrocha y la cúspide de la montaña están en línea recta. La distancia del piso a los ojos de María es de 1.60 m. Si ella está situada a 3.2 m de la garrocha y hay 220 m del centro de la montaña a la distancia en la que se encuentra María, ¿cuál es la altura de la montaña?

Comenten con otros equipos si el método explicado en el problema 2 puede servir para estimar la altura de alguna montaña, una pirámide (como la del Sol en Teotihuacan) o alguna altura inaccesible de su entorno.

3. Para conocer la altura de un puente, Luisa traza la figura 15.5. Ella está en el punto *A* y sus ojos quedan ubicados en el punto *C*. Mira hacia la base del poste derecho $\overline{BD}$ y su vista cruza el vano horizontal del puente en el punto *E*. Con base en las distancias que se muestran en la figura 15.5, ¿cuánto mide la altura $\overline{BD}$ del puente?

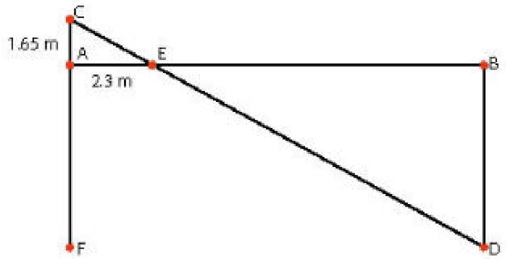


Figura 15.5
Representación de Luisa sobre un puente

4. Un arquitecto está dibujando el plano de un terreno triangular cuyos lados miden 75 m, 60 m y 45 m. En el plano a escala, el lado mayor del terreno está representado por un segmento de 5 cm. ¿Qué longitud deben tener los otros lados?

Reúnanse con otro equipo y comenten cómo resolvieron los problemas. Vean en qué coinciden sus métodos y en qué son diferentes. Comenten si hicieron o no una representación geométrica del problema; quienes sí la hicieron expliquen de qué manera les ayudó a resolver el problema.

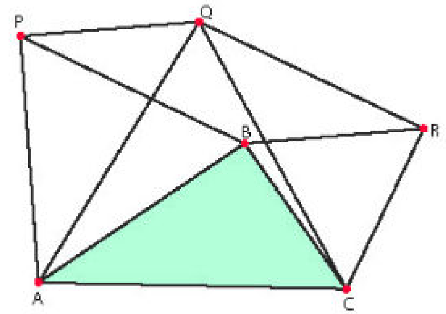
Comparen si usaron los mismos criterios de semejanza o congruencia en las soluciones.

Repasa lo aprendido

En forma individual, resuelve los problemas que se plantean y escribe los procedimientos y dibujos en tu cuaderno.

1. En la figura 15.6 se muestra el triángulo *ABC*. A partir de él se construyen los triángulos equiláteros *ABP*, *ACQ* y *BCR*. Si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 12.5 m y 10 m, respectivamente, ¿cuánto miden los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$?

Figura 15.6
Triángulos equiláteros construidos a partir del triángulo *ABC*



2. Mariana fue al Museo de Historia Natural y Cultura Ambiental y se tomó una foto con un dinosaurio mecánico que estaba a la entrada, como se muestra en la figura 15.7. Si Mariana mide 1.6 m de altura y $\overline{AD}$ = 3.7 m y $\overline{DB}$ = 2 m, ¿cuánto mide la altura $\overline{AC}$ del dinosaurio?

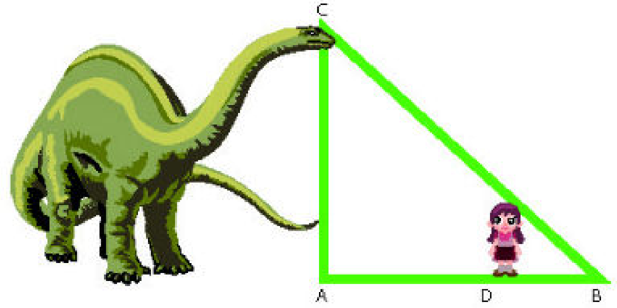


Figura 15.7
Dinosaurio mecánico y Mariana

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Punto inaccesible **Ángulo de reflexión** **Línea de visión**

Lección 16

Teorema de Tales

El alumno aprenderá a:
Resolver problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

Problema de investigación

En parejas, hagan lo que se pide en el siguiente problema.

- En lugares cercanos a cuerpos de agua donde llueve mucho o en zonas en que las tierras se sitúan al nivel del mar o por debajo de éste, es importante que los diques[1] estén bien diseñados y construidos. En la figura 16.1, se muestra una sección transversal de un dique que se representa con el triángulo *ABC*.

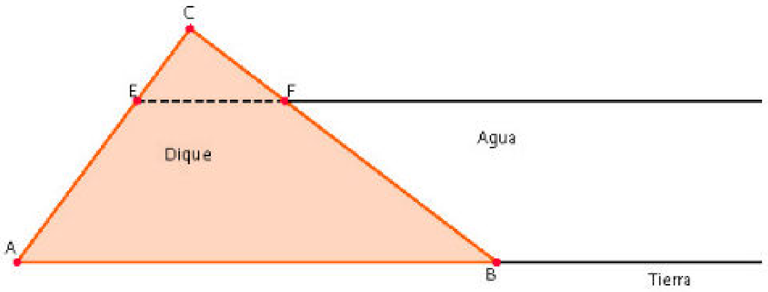


Figura 16.1
Representación de una sección transversal de un dique

El nivel que alcanza la altura del agua es paralelo al nivel de tierra. La fuerza que el agua ejerce sobre el dique depende de la superficie de contacto y de otros factores como el tipo de oleaje que choca contra el dique. La superficie de contacto depende de la longitud $\overline{BF}$.

a) Si se conocen todas las dimensiones del triángulo *ABC* y la distancia $\overline{CE}$, ¿cómo se puede calcular la longitud $\overline{BF}$? ____________________

b) Si los lados del triángulo *ABC* miden 75 m, 60 m, 45 m y la longitud de $\overline{CE}$ es de 5 m, ¿cuánto mide $\overline{BF}$? Justifiquen su respuesta. ____________________

Teorema de Tales

Cuando en un triángulo se traza una línea paralela a alguno de sus lados, de manera que dicha línea corte los otros dos lados en dos puntos diferentes, los segmentos en que quedan divididos estos lados cumplen una propiedad importante cuya formulación se conoce como teorema de Tales, en honor a su descubridor, un científico griego llamado Tales de Mileto (siglo VI a.n.e.). Con la siguiente actividad deducirán dicha propiedad.

[1] Un dique es un muro o construcción para contener la fuerza de las aguas o el oleaje.

Actividad 1. Reúnete con dos compañeros y lleven a cabo lo siguiente.

Problema 1. Los lados del triángulo que se muestra en la figura 16.2 miden 7.5 u, 10 u y 13 u. El punto *P* está sobre el lado $\overline{AC}$ a 3 u de *C*. Se traza un segmento paralelo a $\overline{AB}$ que pasa por el punto *P*, donde *Q* es el punto de intersección con el segmento $\overline{CB}$.

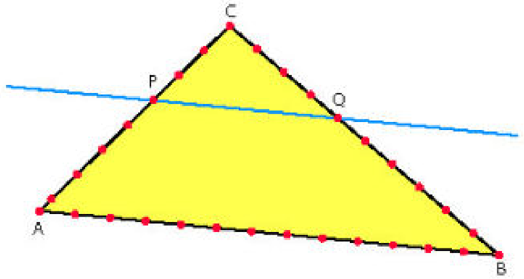


Figura 16.2
Un triángulo cortado por una recta

a) Utilicen el criterio AAA de triángulos semejantes para mostrar que los triángulos $ABC \cong PQC$.

b) Comprueben, utilizando la proporcionalidad de los lados, que el punto *Q* está sobre $\overline{BC}$ a 4 u de *C*.

c) ¿Cuántas unidades mide cada uno de los siguientes segmentos?

i) $\overline{CP}$ = ______ ii) $\overline{PA}$ = ______ iii) $\overline{CQ}$ = ______ iv) $\overline{QB}$ = ______

d) Con base en las respuestas del inciso *c*, ¿se satisface la condición: $\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}$? __________.

¿Por qué? ____________________

Problema 2. En la figura 16.3, se muestra el triángulo *TUV*.

a) Tracen un segmento paralelo a $\overline{TV}$ que corte al triángulo. Llámenle *X* al punto en que la paralela corta a $\overline{TU}$ y *Y* al punto en que corta a $\overline{UV}$.

b) Midan los segmentos $\overline{UX}$, $\overline{XT}$, $\overline{UY}$ y $\overline{YV}$.

c) Con base en la medida de los segmentos del inciso *b*, ¿se satisface una condición similar a la del inciso *d* del problema 1?

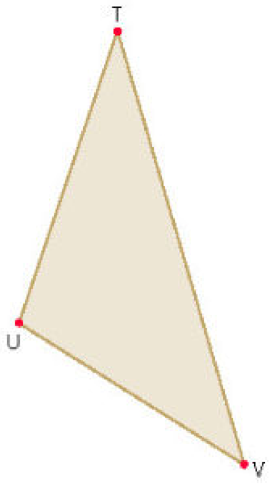


Figura 16.3
Triángulo *TUV*

Reúnanse con otra pareja y comparen las paralelas que trazaron en el problema 2. ¿Sucede lo mismo con las paralelas trazadas por la otra pareja? ¿Cuáles fueron las semejanzas y las diferencias?

Este resultado no es circunstancial sino general y se aplica a dos rectas no paralelas cualesquiera, que pueden ser, en particular, dos lados de un triángulo. En seguida, se establece de forma general y para el caso particular de un triángulo.

Teorema de Tales

Si dos rectas secantes son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas secantes son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

En particular, siempre que un triángulo ABC sea cortado por una transversal $\overline{PQ}$ paralela al lado $\overline{AB}$ del triángulo con P sobre el segmento $\overline{AC}$ y Q sobre el segmento $\overline{CB}$ se cumple que:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}$$

Problemas

En parejas, resuelvan los siguientes problemas aplicando de manera conveniente el teorema de Tales.

1. En la figura 16.4, se muestra el triángulo RST en el que sus lados tienen las siguientes medidas: $\overline{RS} = 8$ u, $\overline{ST} = 9$ u y $\overline{TR} = 6$ u. El punto V está sobre el segmento $\overline{TR}$ de modo tal que $\overline{TV} = 1.5$ u. Se traza por V una paralela al lado $\overline{RS}$ que corta al lado $\overline{TS}$ en W. Encuentren las medidas de los segmentos $\overline{TW}$, $\overline{WS}$ y $\overline{VW}$.

Figura 16.4 Triángulo RST cortado por el segmento $\overline{VW}$ paralelo al lado $\overline{RS}$

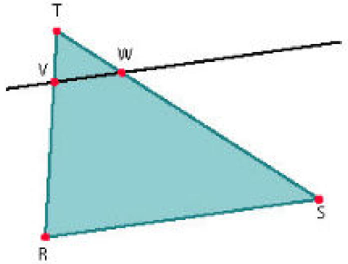
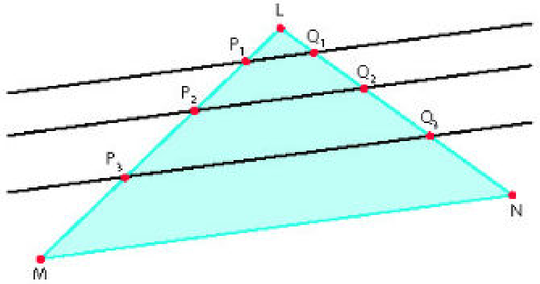


Figura 16.5 Triángulo MNL cortado por paralelas al lado $\overline{MN}$

2. En la figura 16.5, se muestra el triángulo MNL. Los lados del triángulo miden $\overline{MN} = 10$ m, $\overline{NL} = 6$ m y $\overline{LM} = 7$ m. Las rectas $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$, $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$ y $\overleftrightarrow{P_3Q_3}$ son rectas paralelas a $\overline{MN}$. Las medidas de los segmentos son: $\overline{LP_1} = 1$ m, $\overline{P_1P_2} = 1.5$ m, $\overline{P_2P_3} = 2$ m y $\overline{P_3M} = 2.5$ m. Con esta información, encuentren las medidas de los segmentos:

   $\overline{LQ_1}$ = ______________, $\overline{Q_1Q_2}$ = ______________,

   $\overline{Q_2Q_3}$ = ______________ y $\overline{Q_3N}$ = ______________



3. Para dividir el segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales utilizando sólo regla y compás, José realizó el procedimiento que se muestra en la figura 16.6.

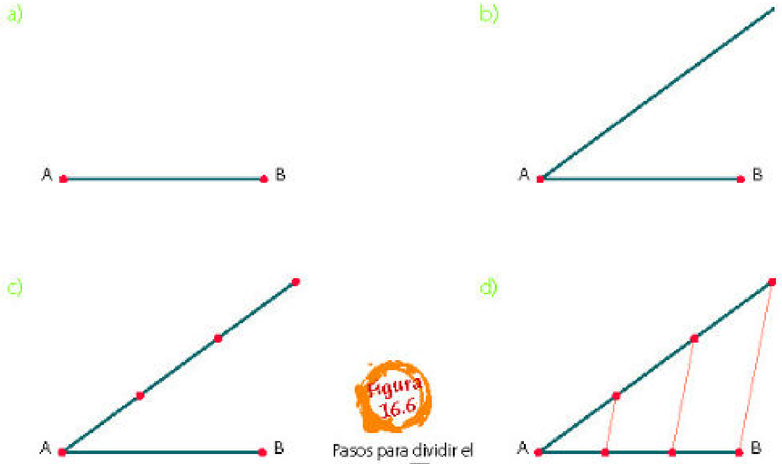


Figura 16.6 Pasos para dividir el segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales utilizando sólo regla y compás

a) ¿Cómo justificarías que el segmento $\overline{AB}$ quedó dividido en tres partes iguales?

b) Traza un segmento $\overline{AB}$ y divídelo en cinco partes iguales empleando el procedimiento de José. ¿Efectivamente queda dividido el segmento en partes iguales?

Reúnanse con otra pareja y explíquenle qué pasos se deben seguir para dividir un segmento cualquiera en cierto número de partes iguales.

4. El siguiente enunciado es una formulación del teorema de Tales:

   En el triángulo ABC, $\overline{EF}$ es paralela a $\overline{AB}$.

   Demuestra que:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}$$

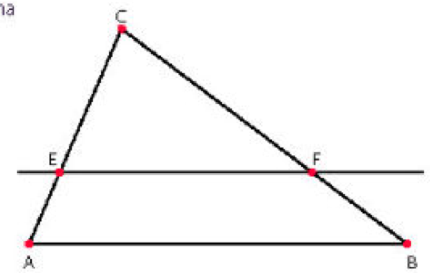


Figura 16.7 Triángulo con un segmento paralelo a un lado

A partir del teorema de Tales, la hipótesis ($\overline{EF}$ paralela a $\overline{AB}$) y la figura 16.7, completen la demostración.

a) Los triángulos EFC y ABC tienen el ángulo C en común.

b) El ángulo CEF es igual al ángulo CAB por: ______________________________

c) Entonces por el criterio AAA, los triángulos ______________ y ______________ son semejantes.

d) Por tanto, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{\overline{CA}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\overline{FC}}$$

e) Pero $\overline{CA} = \overline{CE} +$ ________________ y $\overline{BC} = \overline{BF} +$ ________________.

f) Sustituyendo en los numeradores de la igualdad del inciso *d*, se tiene la siguiente igualdad.

$$\frac{\overline{CE} + \square}{\square} = \frac{\overline{BF} + \square}{\square}$$

g) Separando los sumandos se llega al resultado que se quiere demostrar. Escriban los pasos aquí:

Uso de las TIC

En parejas, hagan lo siguiente en el software GeoGebra.

1. Dibujen un triángulo cualquiera *ABC*. Con la herramienta "Punto medio" o "Centro" encuentren los puntos medios *M* y *N* de $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente. Tracen el segmento $\overline{MN}$. ¿Cómo es este segmento respecto a $\overline{AB}$?
2. ¿Cómo son los triángulos *NMC* y *ABC*?
3. ¿Qué relación existe entre las medidas de los lados correspondientes de los triángulos *ABC* y *NMC*?
4. ¿Qué relación existe entre las medidas de las alturas que corresponden al vértice *C* en los triángulos *ABC* y *NMC*?
5. Con la herramienta "Área" obtengan las áreas de los triángulos *ABC* y *ANM*. ¿Qué relación hay entre ambas áreas?

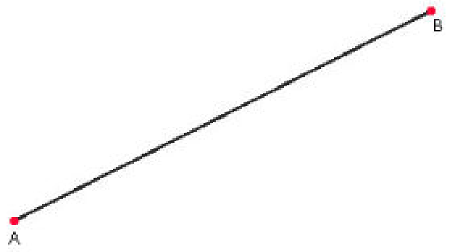
Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve lo que se solicita.

1. En la figura 16.8, se muestra un segmento $\overline{AB}$. Divídelo en nueve partes iguales.

Figura 16.8

Segmento $\overline{AB}$



2. Encuentra la longitud $\overline{BF}$ del dique del "Problema de investigación" que se muestra en la figura 16.1. Supón que los segmentos tienen las siguientes medidas: $\overline{AC} = 29.6$ m, $\overline{AB} = 48.56$ m, $\overline{BC} = 39.04$ m y $\overline{CE} = 9.16$ m.
3. Oswaldo sale a la calle y observa que el asta bandera de la plaza de armas proyecta una sombra de 5 m. En ese momento su sombra mide 2.20 m. Si Oswaldo mide 1.64 m, ¿cuánto mide el asta bandera?

Reúnanse con dos compañeros y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten sus propuestas. Cuando lleguen a un acuerdo sobre los argumentos más prácticos organícense para presentar sus soluciones en un panel grupal con apoyo del maestro.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Segmentos que determina una paralela **Segmentos proporcionales**

Lección 17

Figuras homotéticas

El alumno aprenderá a:
Aplicar la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Problema de investigación

De manera individual resuelve este problema.

- En la figura 17.1, se muestra la proyección de una estrella en una pantalla. El cuadrado *PQRS* es paralelo a la pantalla *P'Q'R'S'*.

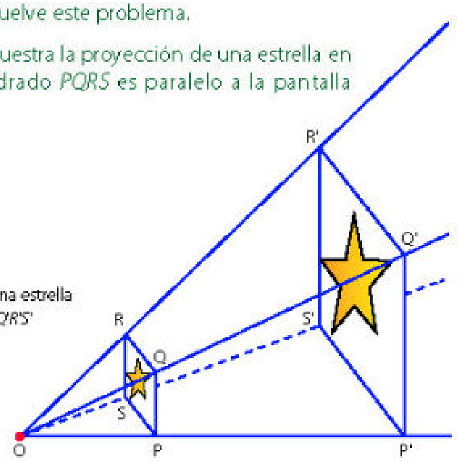


Figura 17.1
Proyección de una estrella en la pantalla *P'Q'R'S'*

Mediante el criterio de semejanza AAA es posible mostrar que:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR'}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OS'}}{\overline{OS}}$$

Si la pantalla *PQRS* mide 5 cm de lado y $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = 2.8$, ¿cuánto mide el lado de la pantalla *P'Q'R'S'*? ____________________

Definición de homotecia

Las proyecciones, como la ilustrada en la figura 17.1, pueden verse como transformaciones que asocian a cada punto de una figura original otro punto de su figura proyectada. Cuando existe una relación proporcional entre las distancias del punto *O* a los puntos de la figura original y las distancias del punto *O* a los puntos de la figura proyectada, se tiene una **homotecia**.

Actividad 1. En parejas, trabajen con los polígonos de la figura 17.2 y utilicen su regla para trazar lo que se pide.

Problema. Midan todos los lados de los polígonos de la figura 17.2 y obtengan el cociente de la medida de cada lado del polígono I entre su correspondiente del polígono II, es decir: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$, etcétera.

a) ¿Qué pueden concluir de los cocientes? ____________________

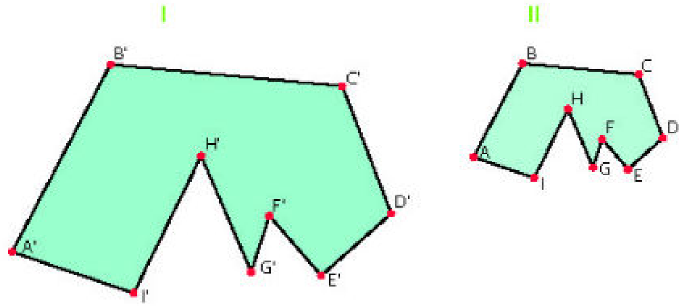


Figura 17.2
Dos polígonos

b) Unan por medio de rectas los vértices correspondientes de ambos polígonos, es decir: *A'* con *A*, *B'* con *B*. Llamen *O* a la intersección de la recta $\overline{A'A}$ con la recta $\overline{B'B}$. Realicen lo mismo con $\overline{C'C}$, $\overline{D'D}$ y así sucesivamente. ¿Qué observan? ____________________

Los polígonos de la figura 17.2 son semejantes u homotéticos. El punto en el que se intersecan las rectas que unen vértices semejantes es el centro de la homotecia.

Actividad 2. En equipos, lleven a cabo lo que se solicita.

Problema. En la figura 17.3, se muestra un polígono. Tomen el punto *O* como centro de la homotecia y únanlo con el punto *A*, prolónguenlo una distancia igual a $\overline{OA}$ para ubicar el punto *A'*; realicen lo mismo con los puntos *B*, *C* y *D* para encontrar los puntos *B'*, *C'* y *D'*. Unan los cuatro puntos obtenidos para formar el polígono *A'B'C'D'*.

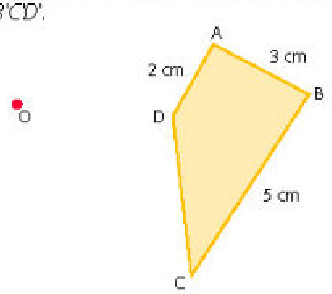


Figura 17.3
Polígono *ABCD*

Con base en su construcción respondan lo siguiente:

a) ¿Qué relación existe entre la medida de los lados de ambos polígonos? ____________________

b) ¿Cómo son los ángulos de las dos figuras? ____________________

c) ¿Qué relación existe entre los perímetros de ambas figuras? ____________________

d) ¿Qué relación hay entre las áreas de ambas figuras? ____________________

e) ¿Cuál es la razón de homotecia? ____________________

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre cuál es la razón de la homotecia.

Actividad 3. Formen equipos de tres estudiantes y lleven a cabo lo que se pide.

Problema 1. En una hoja blanca tracen lo siguiente usando un juego de geometría.

a) Marquen dos puntos (O y R) y elijan un número cualquiera k entre 0 y 1. (Por ejemplo, $k = 0.5$.)

b) Encuentren la distancia de O a R: $\overline{OR}$ = __________

c) Multipliquen esta distancia por el número k: $k \times \overline{OR}$ = __________

d) Tracen una recta que pase por los puntos O y R.

e) Sobre la recta marquen un punto a una distancia $k \times \overline{OR}$ de O, del mismo lado de O en que se encuentra R. Llamen a este punto R'.

f) Se dice que R' es la homotecia de R, con centro O y razón $0 < k < 1$.

g) ¿Qué observan? __________

Formulen la proposición que expresa lo que observaron. __________

Problema 2. Utilizando un juego de geometría dibujen lo que se pide.

a) En una hoja blanca marquen dos puntos (O y S) y elijan un número cualquiera k entre -3 y 0. (Por ejemplo, $k = -1.3$.)

b) Encuentren la distancia de O a S: $\overline{OS}$ =

c) Multipliquen esta distancia por el número k: $k \times \overline{OS}$ =

d) Tracen una recta que pase por los puntos O y S.

e) Sobre la recta marquen un punto a una distancia $k \times \overline{OS}$ de O. Como el resultado es un número negativo háganlo del lado contrario de O en que se encuentra S. Llamen a este punto S'. Se dice que S' es la homotecia de S, con centro O y razón $k < 0$.

Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Comenten el efecto de una homotecia sobre figuras completas para los diferentes valores de k.

En los problemas 1 y 2 obtuvieron los puntos homotéticos para dos casos diferentes: cuando $k < 1$ y cuando k es negativo. Con base en esta construcción se formula la definición de homotecia.

Definición de homotecia

Una **homotecia** de centro O y razón k manda cualquier punto P a otro punto P' de manera que los puntos O, P y P' están alineados (es decir, pertenecen a una misma recta) y la distancia de O a P' es k veces la distancia de O a P. En la figura 17.4, se muestra esta relación:

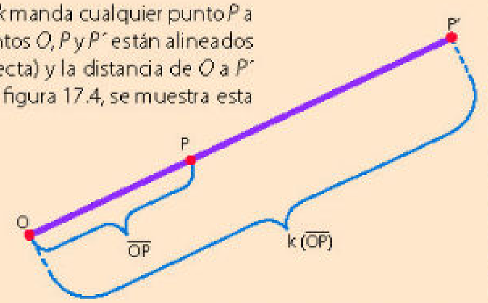


Figura 17.4 La homotecia de centro O y razón k

Actividad 4. De manera individual efectúa lo que se solicita.

Problema. A partir de la figura 17.4, traza las siguientes representaciones en tu cuaderno.

a) Una representación de una homotecia similar a la de la figura 17.4, con la condición de que $0 < k < 1$.

b) Otra representación de una homotecia de un punto cuando $k < 0$.

Actividad 5. En parejas, tracen en su cuaderno lo siguiente.

Problema. Dibujen un triángulo cualquiera T_1 y hagan lo que indica en cada inciso.

a) Elijan un punto O fuera del triángulo T_1.

b) Apliquen una homotecia con centro en O y $k_1 = 1.5$. Al triángulo que obtengan llámenlo T_2.

c) Apliquen a T_2 una homotecia con centro en O y $k_2 = 2$. Al triángulo que obtengan denomínenlo T_3.

d) ¿Qué relación hay entre T_1 y T_3? __________

e) ¿Con qué centro de la homotecia se transforma directamente T_1 en T_3? __________

f) ¿Cuál es la razón k de la homotecia que transforma T_1 en T_3? __________

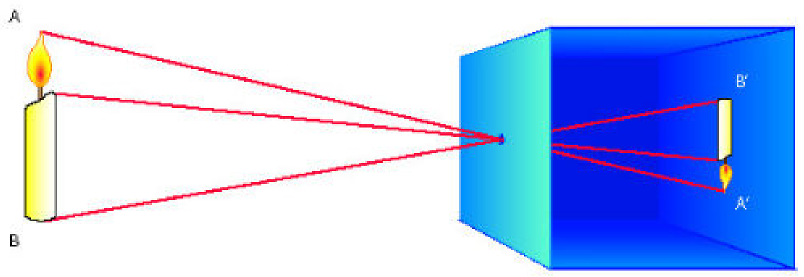
g) ¿Qué relación existe entre k_1, k_2 y k? __________

Reúnanse con dos parejas y muéstrenles los ejemplos que hicieron. Escriban un enunciado basados en lo que observaron en los ejemplos.

Vean si otros equipos llegaron a enunciados similares. Escriban los enunciados en el pizarrón y elijan, con la guía de su maestro, el que sea correcto y les parezca más claro.

Actividad 6. En parejas, hagan lo que se pide. Para ello necesitarán una caja rectangular de cartón, una hoja de papel blanco traslúcido y una vela.

Problema. En la figura 17.5, se muestra un experimento en que se observa una homotecia que reproducirán en su experimento.



a) En una cara de la caja practiquen un pequeño orificio. Quiten la cara contraria de la caja donde hicieron el orificio y peguen la hoja traslúcida de manera que se pueda ver la imagen de la vela.

b) Coloquen la vela y la caja como se muestra en la figura 17.5. Midan la altura de la vela, la distancia de la vela a la caja y el ancho del interior de la caja que separa al orifico de la imagen de la vela. Con estos datos, ¿cuál es el centro y cuál es la razón de la homotecia? ¿Cuál debe ser el largo de la imagen de la vela?

c) Enciendan la vela y midan la longitud de la imagen. ¿Coincide con el cálculo que hicieron en el inciso *b*? Si no coincide, revisen su procedimiento.

d) Si la vela mide 10 cm, la distancia de la vela a la cara con el orificio 50 cm y el ancho del interior de la caja entre el orificio y la imagen es de 15 cm, ¿cuánto debe medir el largo de la imagen de la vela?

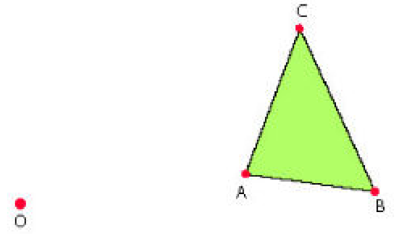
Reúnanse con otra pareja y contrasten tanto los resultados como sus procedimientos. Lleguen a un acuerdo sobre el procedimiento correcto para calcular la longitud de la imagen de la vela.

Problemas

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. En la figura 1.6, se muestra el triángulo *ABC* y un punto *O*. Tracen el resultado de transformar el triángulo *ABC* por una homotecia de centro *O* y radio 1.8 (usen una regla graduada y calculadora).

Figura 17.6 Triángulo y centro de homotecia



Homotecia en dos cuadrados

Dados dos cuadrados cualesquiera y una correspondencia de sus lados de manera que los lados correspondientes sean paralelos, existe una homotecia que transforma un cuadrado en el otro.

2. A partir de la información del recuadro "Homotecia en dos cuadrados", determinen, para los cuadrados de la figura 17.7, su centro y la razón de la homotecia.

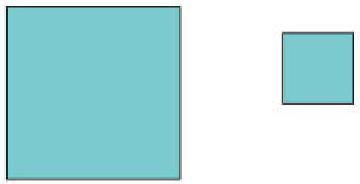


Figura 17.7 Dos cuadrados

3. Dibujen un triángulo *ABC* y un punto *O* en el plano. Tracen la recta que contiene al segmento $\overline{OA}$ y sobre esta recta marquen un punto *A'*. Por *A'* tracen una recta paralela a $\overline{AB}$; llamen *B'* a la intersección de esta paralela con la recta que contiene a $\overline{OB}$. De manera similar, por *A'* tracen una recta paralela a $\overline{AC}$ y llamen *C'* a la intersección de esta paralela con la recta que contiene a $\overline{OC}$. Tracen el triángulo *A'B'C'*. Con base en su construcción demuestren que el triángulo *A'B'C'* es una homotecia con centro *O* del triángulo *ABC*, y que los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes.

En grupo comenten las soluciones a los problemas. En plenaria, respondan esta pregunta: ¿La homotecia para dos cuadrados también se aplica para cualquier polígono? Con la guía de su maestro lleguen a un acuerdo sobre la respuesta más adecuada.

Áreas de figuras homotéticas

Actividad 7. En equipos, realicen en su cuaderno lo que se pide.

Problema. Si una figura *Y* es una figura homotética con centro en el punto *O* y razón *k* de otra figura *X* de área *A*.

a) ¿Cuál es el área de la figura *Y*: $\sqrt{k} \times A$, $k \times A$ o $k^2 \times A$?

b) Tracen un cuadrado de 2 u de lado. Elijan un punto como centro de la homotecia y con $k = 1.5$. Dibujen el cuadrado homotético del cuadrado de 2 u de lado.

i) ¿Cuál es la longitud de su lado? ____

ii) ¿Cuál es el área? ____

c) ¿Con cuál de estas expresiones se obtiene el mismo número: $\sqrt{k} \times A$, $k \times A$ o $k^2 \times A$?

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Cada equipo proponga una figura con las condiciones del problema de la actividad 7 y compárenlas. ¿Se aplica lo mismo para cualquier figura?

Problemas

En equipos de tres alumnos resuelvan los problemas.

1. Determinen los vértices de la figura que resulta de transformar un cuadrado *ABCD* mediante una homotecia de vértice *O*. Si la figura homotética resultante tiene un área cuatro veces mayor que la del cuadrado *ABCD*, ¿cuál es la razón de homotecia?

2. Dos primos heredan un terreno de forma triangular como el que se muestra en la figura 17.8 y deciden dividirlo en dos terrenos cuya área sea igual mediante una paralela al lado $\overline{BC}$. ¿En qué punto del segmento $\overline{AB}$ debe cruzar la paralela? Es decir, ¿por qué número deben multiplicar el segmento $\overline{AB}$ para obtener el segmento $\overline{AP}$, donde *P* es el punto sobre $\overline{AB}$ en el que debe cruzar la paralela?

3. Un triángulo tiene un perímetro de 20 u y un área de 12 u². Por medio de una homotecia se obtiene un triángulo cuyo perímetro es 60 u. ¿Cuál es su área? ____

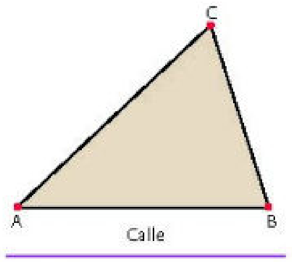


Figura 17.8 Representación de un terreno

En grupo comparen sus respuestas. Cada equipo debe proponer una figura y su homotecia. Pidan a otro equipo que encuentre el vértice y la razón de la homotecia, lleguen a un acuerdo sobre la forma más práctica de encontrar estos valores; soliciten ayuda de su maestro en caso necesario.

Uso de las TIC

De manera individual efectúa lo siguiente.

En el software GeoGebra puedes explorar muchas propiedades de la homotecia. En la novena ventana del menú de herramientas, se encuentra "Homotecia desde un punto por un factor de escala". Dibuja un triángulo ABC y un punto O. Luego haz clic en "Homotecia", marca el triángulo y después el punto O; aparece una ventana que te pide el factor. Escribe el factor 1.5 y "Ok". Aparece el triángulo homotético. Con esta aplicación puedes resolver o verificar la solución de los problemas anteriores.

Repasa lo aprendido

Individualmente resuelve en tu cuaderno cada problema.

1. Dado un triángulo ABC, encuentra el ortocentro (intersección de las alturas) tomando éste como centro de la homotecia y la razón $k = 0.5$. Dibuja el triángulo $A'B'C'$ que sea homotético a ABC.
2. En la figura 17.9, se muestran dos circunferencias, no necesariamente del mismo tamaño, que son tangentes y tienen en común el punto P. Por el punto P se trazan tres rectas diferentes que cortan a una de las circunferencias en los puntos A, B y C. Sean A', B' y C' los respectivos puntos de intersección de las rectas con la otra circunferencia.

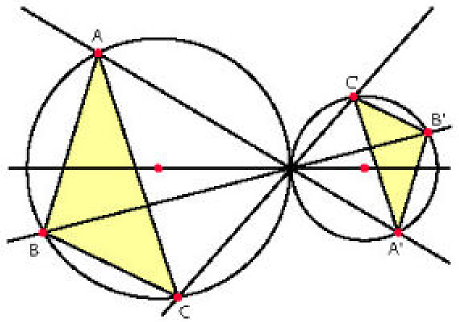


Figura 17.9 Dos circunferencias

a) ¿Son homotéticos los triángulos ABC y $A'B'C'$? ________. Justifiquen su respuesta. ________

b) Si la razón del radio de la circunferencia menor entre el radio de la circunferencia mayor es $\frac{5}{9}$, ¿cuál es la razón de la homotecia? Expliquen por qué. ________

c) Si las dimensiones del triángulo ABC son $\overline{AB} = 6.3$ u, $\overline{BC} = 4.59$ u y $\overline{CA} = 3.6$ u, ¿cuáles son las dimensiones del triángulo $A'B'C'$?

3. El perímetro de un triángulo es de 45 u y su área de 80 u^2. Mediante una homotecia se obtiene un triángulo cuya área mide 5 u^2. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Centro de homotecia **Razón de homotecia** **Figuras homotéticas**

El alumno aprenderá a:
Leer y construir gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Lección 18 Funciones cuadráticas y modelaje de fenómenos

Problema de investigación

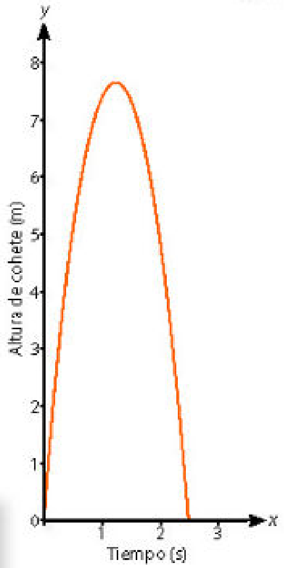
De manera individual lleva a cabo lo siguiente.

- Luis construyó un cohete experimental que, al despegar, lo hace en forma vertical. La altura del cohete se describe mediante la ecuación $y = -4.9x^2 + 12.25x$.

a) La gráfica 18.1 describe el comportamiento de la ecuación, donde x es el tiempo expresado en segundos. ¿Cuál es la interpretación de la gráfica 18.1?

____

b) Completa la tabla 18.1; puedes utilizar calculadora.



Gráfica 18.1 Gráfica de altura contra tiempo de un cohete experimental

Tabla 18.1 Descripción del movimiento de un cohete experimental

x (segundos)	0.5	1.0	1.25	1.5	2.0	2.5
y (metros)						

c) ¿Qué significa que la curva alcance su máximo en el punto (1.25, 7.6525)?

____

¿Qué significado tiene que la curva de la gráfica 18.1 interseque al eje x en los puntos (0, 0) y (2.5, 0)? ________

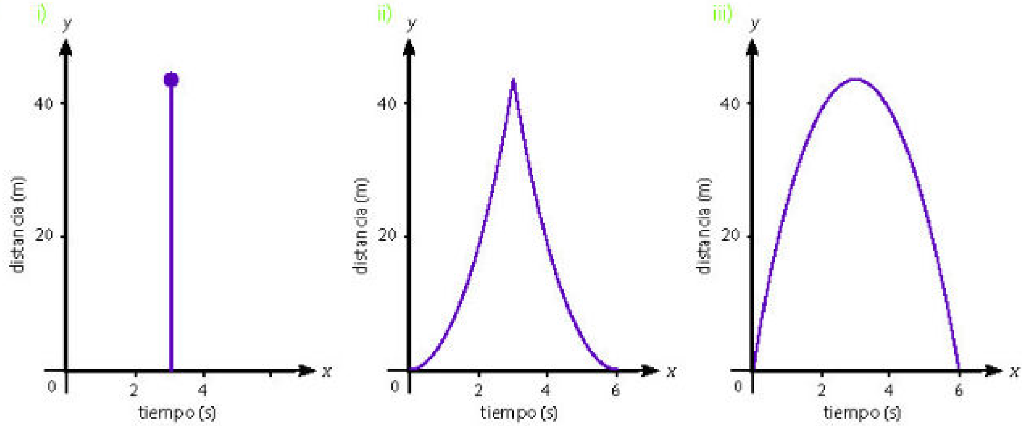
Gráficas de funciones cuadráticas

Actividad 1. En parejas, respondan las preguntas planteadas.

Problema. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba y se registra la distancia que recorre conforme pasa el tiempo. A los 6 s se observa que alcanza una altura de 44.1 m y comienza a descender por la misma trayectoria en que ascendió.

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa adecuadamente el problema? ________.

Expliquen por qué. ________



b) ¿En cuánto tiempo el proyectil tocará tierra de nuevo? ______________. Expliquen su respuesta. ______________

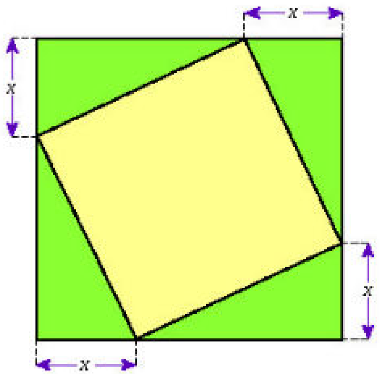
Comparen sus resultados con los de otra pareja. Expliquen por qué las dos gráficas que no escogieron no pueden ser la solución del problema.

Actividad 2. En equipos de tres alumnos efectúen lo que se indica en cada inciso.

Problema. A un arquitecto le piden que, en un terreno cuadrado de 50 m de lado, diseñe un parque con cuatro jardines triangulares y una plancha de cemento de forma cuadrada. En cada lado del terreno se ubica un punto a una distancia x, de manera que con los cuatro puntos se construye un cuadrilátero inscrito en el cuadrado, como se muestra en la figura 18.1.

Figura 18.1

Cuadrilátero inscrito en un cuadrado de 50 m de lado



a) Escriban argumentos para apoyar la afirmación de que el cuadrilátero inscrito es un cuadrado. ______________

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del cuadrado en función de x? Llámenla $A(x)$. ______________

c) Muestren que el área del cuadrilátero inscrito es mínima cuando $x = 25$.

Ecuación cuadrática y su función asociada

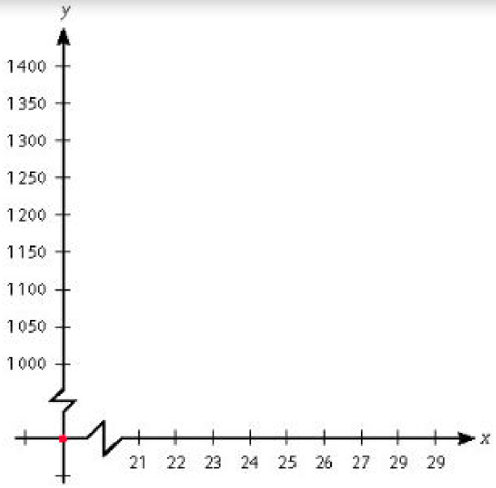
Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. La **función asociada** a esta ecuación cuadrática es la función $y = ax^2 + bx + c$.

d) Para mostrar que el área es mínima cuando $x = 25$, escriban la ecuación: $A(x) =$ ______________

Después completen la tabla 18.2 con los valores de su función asociada y tracen la gráfica correspondiente. (Revisen, si es necesario, la información del recuadro "Ecuación cuadrática y su función asociada".)

Tabla 18.2 Área del cuadrilátero inscrito en el cuadrado

x	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$A(x)$									



Gráfica 18.2

Comparen sus resultados con los de otros equipos y respondan: ¿Qué propiedad geométrica utilizaron para calcular el lado del cuadrado? ______________ ¿Varios equipos usaron la misma propiedad? ______________ ¿Utilizaron el hecho de que el cuadrado de la raíz de una distancia es igual a la distancia? ______________ Justifiquen su respuesta. ______________

Actividad 3. En parejas, realicen lo que se pide. Usen una calculadora en esta actividad.

Problema. Un objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial v_0 $(\frac{m}{s})$. La distancia y que alcanza (en metros) está dada por la fórmula $y = v_0x - \frac{1}{2}gx^2$, donde x es el tiempo a partir del momento del lanzamiento (en segundos) y $g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$ es la aceleración constante debida a la gravedad.

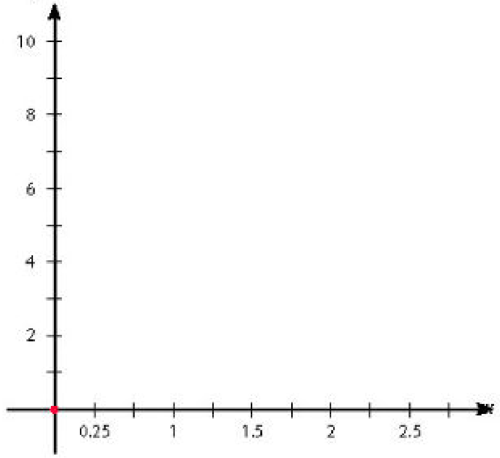
a) Escriban la función que describe la distancia si se lanza un objeto con una velocidad inicial $v_0 = 12\,\frac{m}{s}$. ______________

b) Con la función que escribieron en el inciso *a*, calculen las distancias del objeto para los valores de tiempo de la tabla 18.3.

Tabla 18.3 Distancias de un objeto lanzado hacia arriba en diferentes valores de tiempo

x (tiempo en segundos)	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75
y (distancia en metros)												

c) Tracen la gráfica de la función con los datos de la tabla 18.3.



Gráfica 18.3

Reúnanse con otro equipo y comparen sus resultados. Revisen la actividad 1 y su respuesta. ¿Qué gráfica del inciso *a* se parece a la que dibujaron? ______ ¿Qué pueden concluir de las semejanzas y las diferencias de las gráficas que compararon?

______

Actividad 4. Formen parejas, lean el problema y hagan lo que se solicita.

Problema 1. En la figura 18.2, se muestra un terreno de forma rectangular cuyo fondo mide el doble que el frente. Está dividido en dos partes por una pared situada a 30 m del frente y paralela a él.

a) Si el área de la parte trasera del terreno mide 3 500 m², ¿cuáles son las dimensiones del terreno? ______

b) ¿Qué ecuación expresa las relaciones del problema? ______

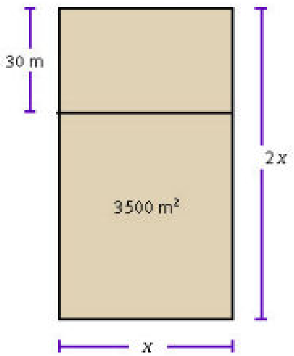
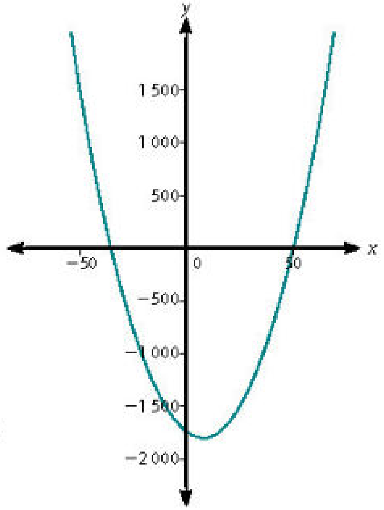


Figura 18.2 Terreno rectangular

c) Aldo encontró la ecuación, la introdujo en el software GoeGebra y obtuvo la gráfica 18.4.
Según esta gráfica, ¿cuál sería la solución del problema? ______
¿Por qué? ______

d) ¿La solución que dedujeron de la gráfica 18.4 es también la solución a la ecuación que formularon en el inciso *b*?



Gráfica 18.4 Función asociada a la ecuación de la solución

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten de qué manera es posible encontrar la solución en la gráfica y cómo se comprueba que, efectivamente, es la solución del problema.

Problema 2. Melissa es inversionista inmobiliaria y antes de emprender cualquier proyecto lleva a cabo un estudio económico para saber qué rendimiento obtendrá.

La gráfica 18.5 es parte del informe de resultados que le presenta uno de sus socios, en la que se muestra el rendimiento que puede obtener dependiendo del número de casas que se construyan.

Con base en la gráfica 18.5 respondan:

a) ¿Cuál es el mínimo de casas que deben construirse para que Melissa obtenga rendimientos en este proyecto? ______

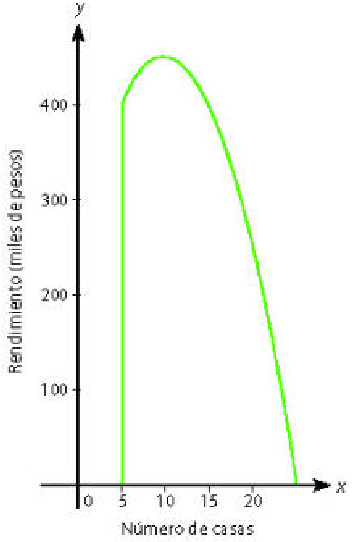
b) Estimen el número de casas que hay que construir para obtener el máximo rendimiento. ______

c) ¿Cuál de las siguientes funciones genera la gráfica 18.5?

i) $y = 2x^2 + 40x + 250$

ii) $y = -2x^2 + 40x - 250$

iii) $y = -2x^2 + 40x + 250$



Gráfica 18.5 Rendimiento en función del número de casas

d) ¿Cómo completarían la tabla 18.4 considerando la función que eligieron en el inciso *c*?

Tabla 18.4 Rendimiento de la inversión en función del número de casas

Núm. de casas	8	9	10	11	12
Rendimiento					

e) ¿Coinciden los datos obtenidos en la tabla 18.4 con los que se indican en la gráfica 18.5? Si no es así, revisen su procedimiento. ¿Cómo fue su estimación del inciso *b* comparada con los datos que obtuvieron en la tabla 18.4?

f) ¿Cuál es el rendimiento cuando se construyen 10 casas? ______

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten cuál es la importancia de saber interpretar gráficas para entender diversos tipos de informes; en particular, uno como el del problema 2.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. Revisa de nuevo el "Problema de investigación". ¿Los resultados que obtuviste son correctos? Si no lo son, analiza el procedimiento y corrige los posibles errores.
2. Si se lanza hacia arriba un móvil con velocidad inicial $v_o = 15\frac{m}{s}$, ¿en cuánto tiempo volverá a tocar tierra? ______
3. Un rectángulo tiene un perímetro de 120 m. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo para obtener el área máxima? ______
4. Un grupo está organizando la compra de un regalo para la maestra de matemáticas. Decidieron cooperar en partes iguales para reunir \$600. Si el grupo tuviera 20 alumnos más, la cooperación de cada uno sería de \$1 menos. ¿Cuántos alumnos tiene el grupo? ______

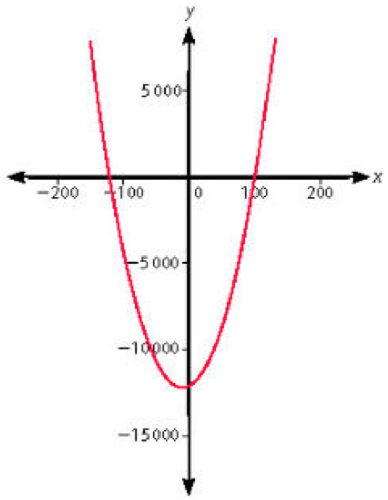
   a) ¿Cuál es la ecuación que resuelve el problema? ______

   b) Fanny encontró la ecuación y la graficó con la función asociada en el software GeoGebra; obtuvo la gráfica 18.6. Con base en la gráfica, ¿cuál sería la solución del problema? ______

   c) ¿La solución que se infiere de la gráfica 18.6 es, también, la solución a la ecuación que formulaste en el inciso *a*? ______

   d) ¿La ecuación que formulaste tiene la misma gráfica? ______

   Justifica tu respuesta. ______



Gráfica 18.6 Función asociada al problema

En equipos comparen las respuestas a los problemas anteriores. Frente al grupo y con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas y comenten cuál es la relación de las funciones asociadas con su gráfica.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Ecuación cuadrática **Función asociada a una ecuación cuadrática**

Lección 19 Gráficas compuestas que modelan diversos fenómenos

El alumno aprenderá a: Leer y construir gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Problema de investigación

En parejas, resuelvan el siguiente problema.

- María sale a la tienda, que está a 200 m de su casa. Va a un ritmo de 40 $\frac{m}{min}$ y, a la mitad del camino, se detiene a platicar un minuto con Luisa. Cuando se despide de ella empieza a lloviznar y entonces camina de nuevo hacia la tienda 2.5 veces más rápido que en el primer tramo.

  En la gráfica 19.1, tracen la relación entre el tiempo que tarda María en llegar a la tienda y la distancia recorrida.

Gráfica 19.1

Funciones de distancia contra tiempo

Uno de los temas de estudio de la física es la descripción matemática del movimiento, es decir, el desplazamiento de un objeto en determinado tiempo. Un móvil que se desplaza sigue una trayectoria; sin embargo, su descripción matemática consiste en determinar, por ejemplo, qué relación hay entre la variación de la distancia del móvil a un punto conforme pasa el tiempo o —como se verá en una sección posterior— la relación entre velocidad y tiempo. A continuación se estudiarán gráficas de la relación entre distancia y tiempo.

Actividad 1. En equipos, realicen lo que se pide. Utilicen una regla graduada.

Problema. César es un corredor de pista y la trayectoria que recorre a una velocidad uniforme se muestra en la figura 19.1. El punto *P* representa la posición de César y el punto *C* el centro de la pista. A medida que el corredor avanza hacia la meta, se mide la distancia del centro a su posición conforme se desplaza por la pista.

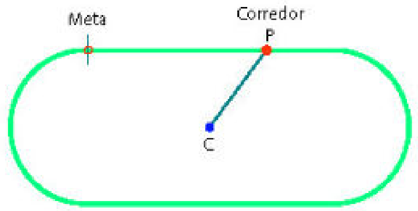
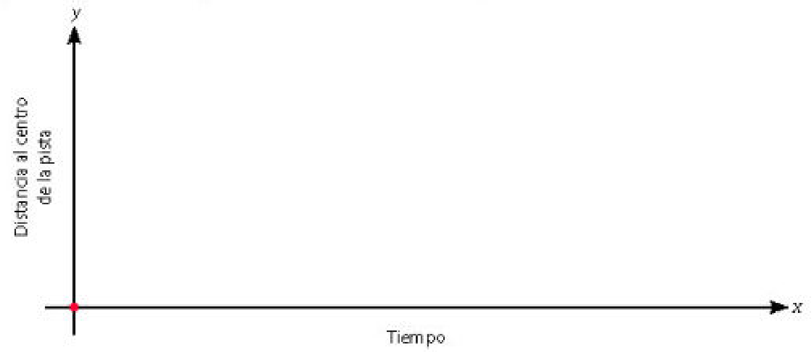


Figura 19.1 Pista de atletismo

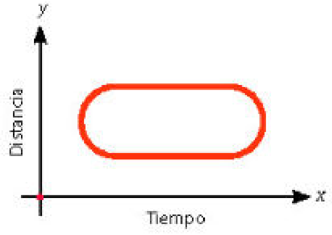
a) En la gráfica 19.2, tracen la variación de la distancia que hay entre César y el centro de la pista, respecto al tiempo, cuando da una vuelta completa.



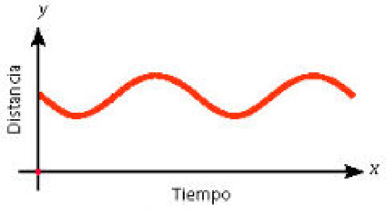
Gráfica 19.2

b) ¿Qué gráfica es parecida a la que propusieron en el inciso *a*? ______

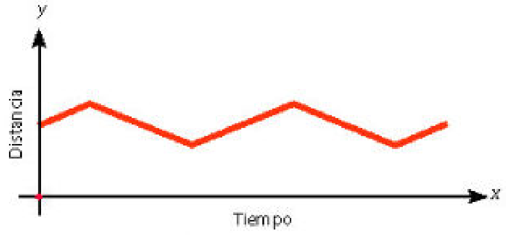
Gráfica 19.3



Gráfica 19.4



Gráfica 19.5



Gráfica 19.6

c) Expliquen por qué las tres gráficas que no eligieron no representan adecuadamente la situación planteada en el problema 1. ______

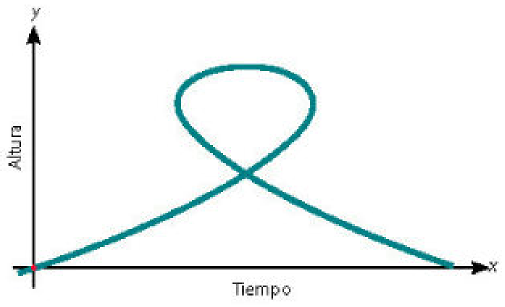
Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Elaboren un modelo matemático con base en la gráfica elegida en el inciso *b*, dividan la pista en varios segmentos de la misma longitud y midan cada distancia. Grafiquen los puntos obtenidos. Con estos resultados, ¿qué gráficas se adaptan mejor a sus datos? ______ ¿Por qué? ______

Problemas

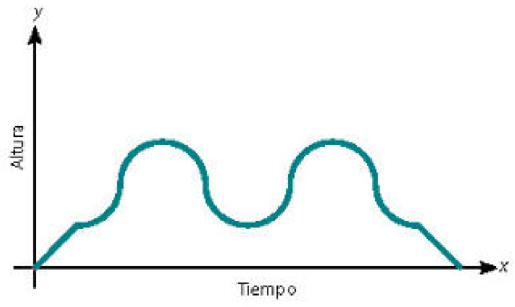
De manera individual resuelve el problema.

Gonzalo fue a la feria y se subió a la rueda de la fortuna.

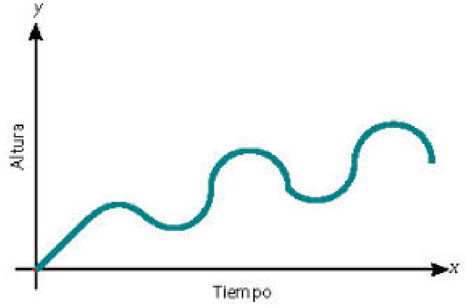
a) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la altura de la posición de Gonzalo respecto al tiempo?



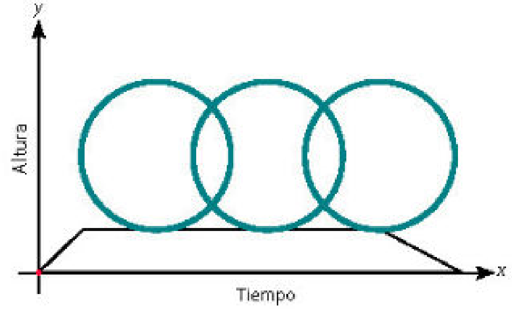
Gráfica 19.7



Gráfica 19.8



Gráfica 19.9



Gráfica 19.10

b) Explica por qué las otras tres gráficas no pueden representar de modo correcto la situación. ______

En parejas, comparen sus respuestas. Después de asegurarse de haber entendido el problema de la misma forma, expliquen a su compañero el razonamiento que siguió cada uno para decidir qué gráfica representa la solución.

Llenado de recipientes

Actividad 2. En equipos de tres alumnos, lean el problema y respondan las preguntas formuladas en los incisos.

Problema. Los cuatro recipientes de la figura 19.2 tienen la misma altura: 1.40 m. Todas las llaves dejan pasar el mismo flujo de agua y los recipientes comienzan a llenarse al mismo tiempo. Antes de abrir las llaves, esto es, en el tiempo cero, los recipientes están vacíos.

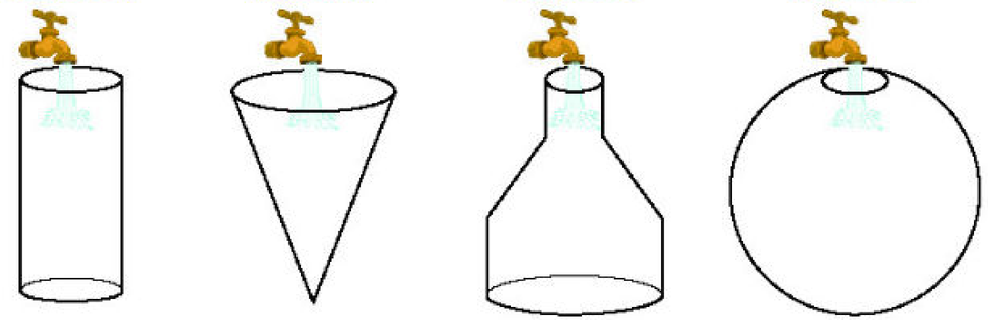
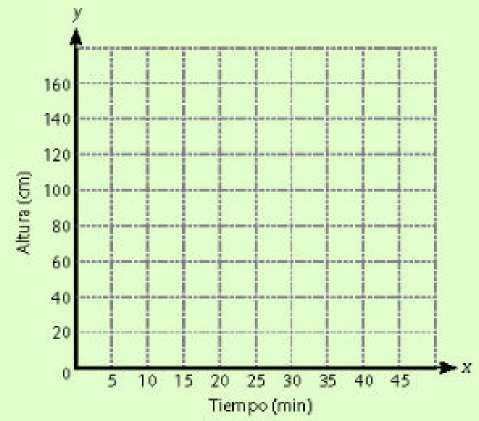


Figura 19.2
Llenado de cuatro recipientes

a) Tracen la gráfica 19.11 en la cual se describa la altura del agua en cada uno de los recipientes. Consideren que el tiempo de llenado es:

- Recipiente A: 30 minutos.
- Recipiente B: 20 minutos.
- Recipiente C: 25 minutos.
- Recipiente D: 40 minutos.

Utilicen un color distinto para la gráfica de cada recipiente y márquenla con la letra respectiva.



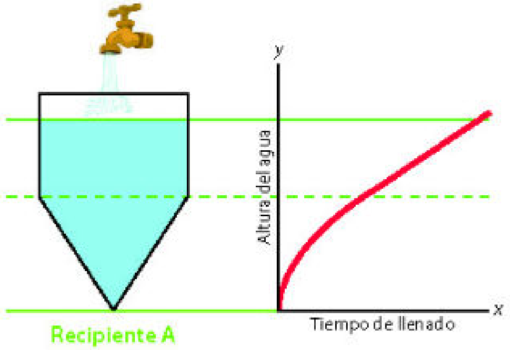
Gráfica 19.11

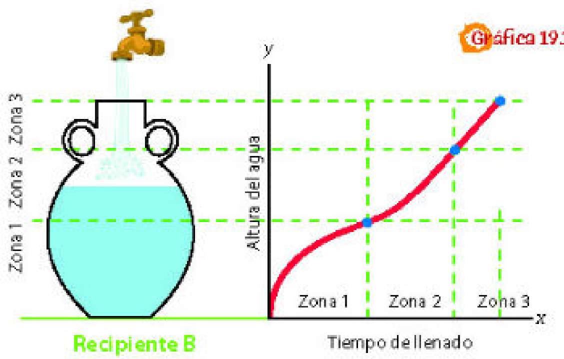
Comparen sus gráficas con las de otros equipos. ¿Son similares? Si no lo son, revisen y expongan con claridad las ideas que sustentan sus respuestas. Con ayuda del maestro lleguen a un consenso sobre los resultados correctos, las características de las gráficas y el método para trazarlas.

Actividad 3. En equipos, respondan lo que se pide.

Problema. En las gráficas 19.12 y 19.13 se muestra, respectivamente, el llenado de los recipientes A y B. Analiza cada gráfica para responder las preguntas que se plantean.

Gráfica 19.12

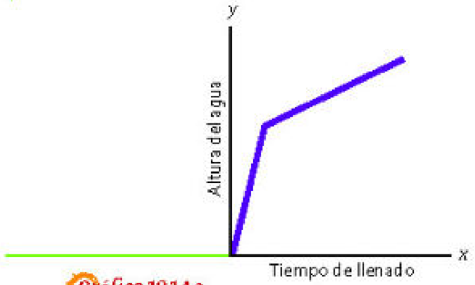




Gráfica 19.13

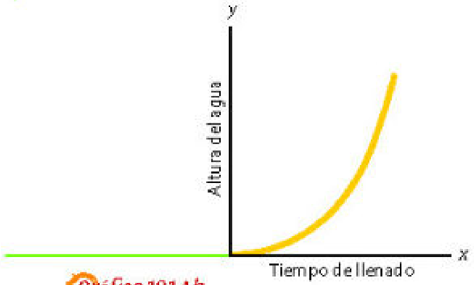
a) Dibujen la forma del recipiente que puede dar origen a cada una de las gráficas 19.14 *a-f*. Consideren que el eje *x* corresponde al tiempo de llenado y el eje *y* a la altura del nivel de

i)



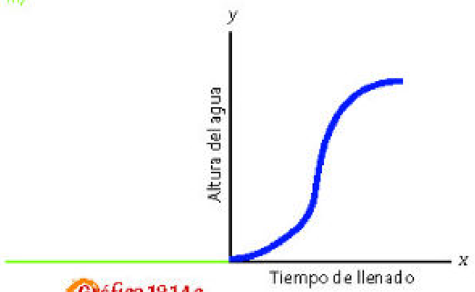
Gráfica 19.14*a*

ii)



Gráfica 19.14*b*

iii)

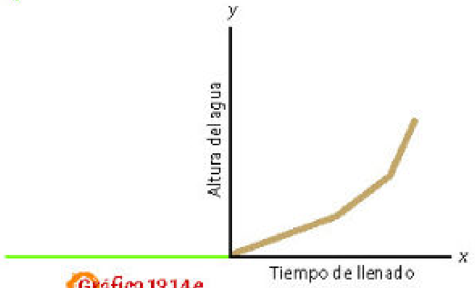


Gráfica 19.14*c*

iv)

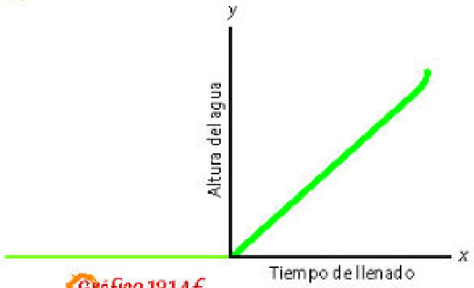
Gráfica 19.14*d*

v)



Gráfica 19.14*e*

vi)



Gráfica 19.14*f*

agua.

b) Tomando en cuenta las diferentes formas de los recipientes de la figura 19.3, bosquejen en su cuaderno las gráficas que originan.

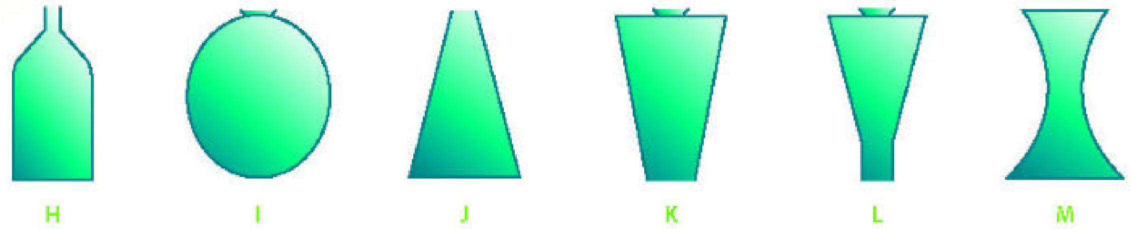
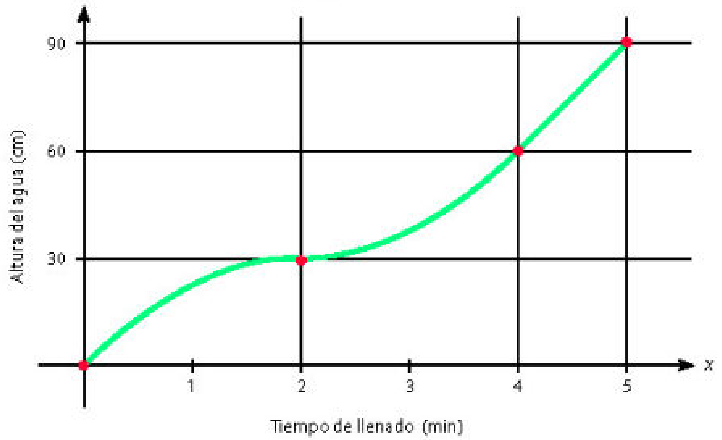


Figura 19.3
Recipientes de diferente forma

c) La gráfica 19.15 representa el cambio en la altura del nivel de agua, respecto al tiempo, de un recipiente que se llena con un flujo uniforme desde que está vacío hasta que se llena por completo. Con la información de la gráfica 19.15 respondan las preguntas.

Gráfica 19.15



i) ¿Cuál es la altura del recipiente? ____________________

ii) ¿Cuánto tarda en llenarse? ____________________

iii) ¿Cuál es la altura del nivel de agua cuando han transcurrido dos minutos a partir de que comenzó a llenarse? ____________________

iv) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que comienza a llenarse hasta que la altura del nivel de agua alcanza 75 cm? ____________________

Comparen tanto los dibujos como las gráficas que trazaron con los de otro equipo. ¿Son similares? ____________. Expliquen la relación que encontraron entre los dibujos y las gráficas. ____________________

____

____

Funciones de velocidad contra tiempo

Velocidad

La **velocidad** es una medida que depende del tiempo y la distancia.

La **velocidad promedio** de un objeto en un intervalo de tiempo Δt es el cociente de la distancia recorrida entre el intervalo de tiempo: $v = \frac{d}{\Delta t}$

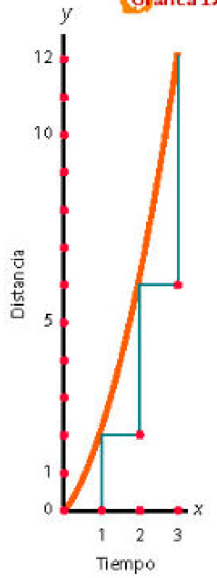
Actividad 4. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. Lean las proposiciones siguientes:

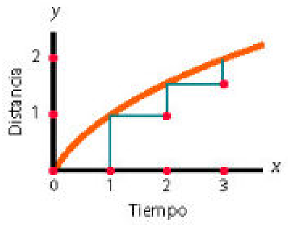
- Proposición 1: Si en cada intervalo de tiempo la distancia recorrida es la misma, la velocidad es *constante*.
- Proposición 2: Si en cada intervalo de tiempo la distancia recorrida aumenta, la velocidad es *creciente*.
- Proposición 3: Si en cada intervalo de tiempo la distancia recorrida disminuye, la velocidad es *decreciente*.

a) Las gráficas 19.16, 19.17 y 19.18 ejemplifican las proposiciones anteriores. Asocien cada proposición con la gráfica que la represente de manera correcta.

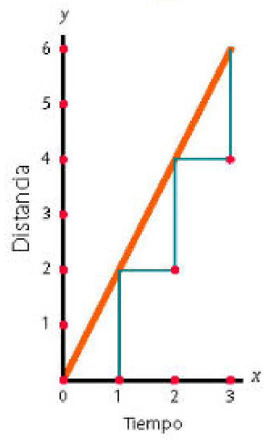
Gráfica 19.16



Gráfica 19.17

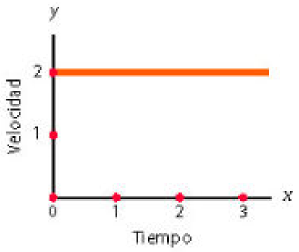


Gráfica 19.18

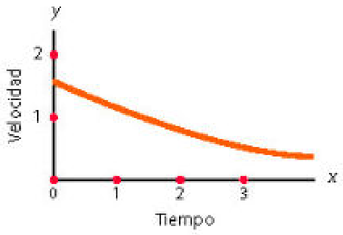


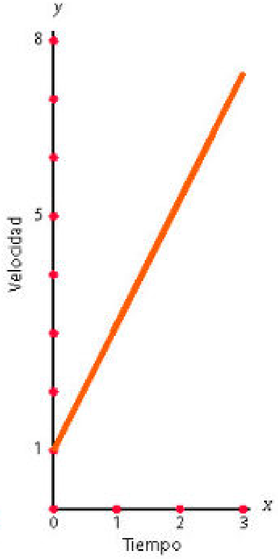
b) En las gráficas 19.19, 19.20 y 19.21 se representa cómo cambia la velocidad respecto al tiempo (a esta relación se le llama *aceleración*). Tales gráficas se obtuvieron a partir de las gráficas distancia contra tiempo del inciso *a*. Debajo de las gráficas 19.19, 19.20 y 19.21 anota el número de la gráfica que le corresponde del inciso *a* tomando en cuenta el concepto de aceleración.

Gráfica 19.19



Gráfica 19.20





Gráfica 19.21

En las gráficas de distancia contra tiempo, Elisa afirma que la velocidad se puede estimar dividiendo el eje del tiempo en pequeños intervalos y observando la distancia recorrida. ¿Estás de acuerdo con ella? ______________________ Explica por qué.

____

Problemas

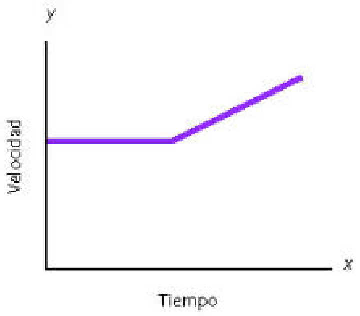
En parejas, resuelvan los problemas formulados.

1. Armando sube una colina a velocidad constante y después baja corriendo. ¿Qué gráfica describe la velocidad de Armando respecto al tiempo (aceleración)? ______________________

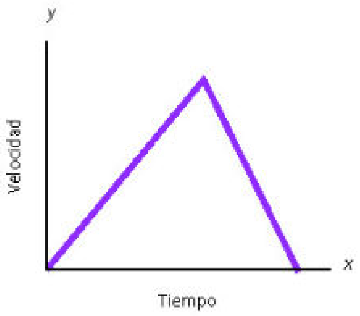
Justifiquen su respuesta. ______________________

____

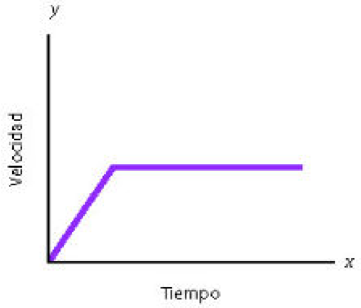
Gráfica 19.22



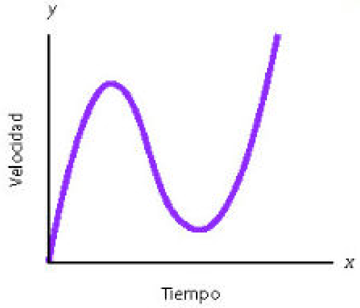
Gráfica 19.23



Gráfica 19.24



Gráfica 19.25



2. En la figura 19.4 se muestra una sección de una montaña rusa. La trayectoria que sigue un carro va del punto *A* al punto *G*. La velocidad es lenta y constante en los tramos planos, pero en las bajadas o en las subidas su velocidad aumenta o disminuye, respectivamente, debido a la fuerza de gravedad.

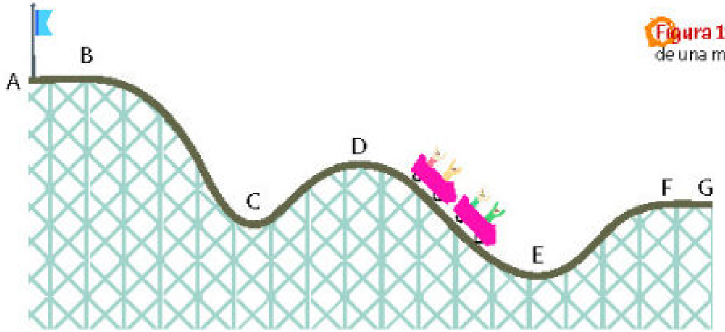


Figura 19.4 Sección de una montaña rusa

a) Describe verbalmente cómo varía la velocidad del carro en cada tramo.

De *A* a *B*: ______________________

De *B* a *C*: ______________________

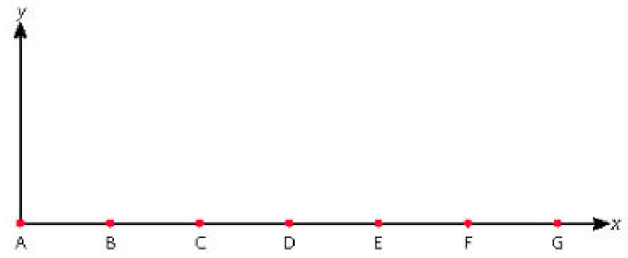
De *C* a *D*: ______________________

De *D* a *E*: ______________________

De *E* a *F*: ______________________

De *F* a *G*: ______________________

b) Bosquejen la gráfica 19.26 (velocidad contra tiempo) que describe el movimiento del carro sobre la montaña rusa.



Gráfica 19.26

c) Juan comenta: "La gráfica de la velocidad se parece a la figura 19.3, sólo que invertida". ¿Está en lo correcto? ________ ¿Por qué? ____________________

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Expliquen a sus compañeros cómo aplicaron su conocimiento sobre la velocidad del carro para elaborar la gráfica. También comenten sobre el nuevo conocimiento que adquirieron con esta actividad.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. Pedro fue a una panadería que está a 600 m de su casa. Iba caminando a un ritmo constante, pero a la mitad del camino recordó que se le había olvidado el dinero, así que regresó y se dirigió nuevamente a la panadería al doble de la velocidad con que iba al inicio para llegar antes de que cerraran. Haz en tu cuaderno un bosquejo de la gráfica que representa la distancia recorrida en cada minuto a partir de que salió por primera vez de su casa hasta llegar a la panadería.
2. Un recipiente tiene forma de cono truncado como se muestra en la figura 19.5. La distancia de la base a la boca del recipiente es de 1.60 m; una llave tarda 50 minutos en llenarlo y se considera que el tiempo es cero cuando el recipiente está vacío. En la gráfica 19.27, tracen la relación entre la altura del agua en el recipiente y el tiempo durante los primeros 50 minutos, desde que el recipiente comienza a llenarse.

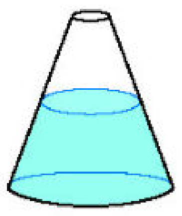
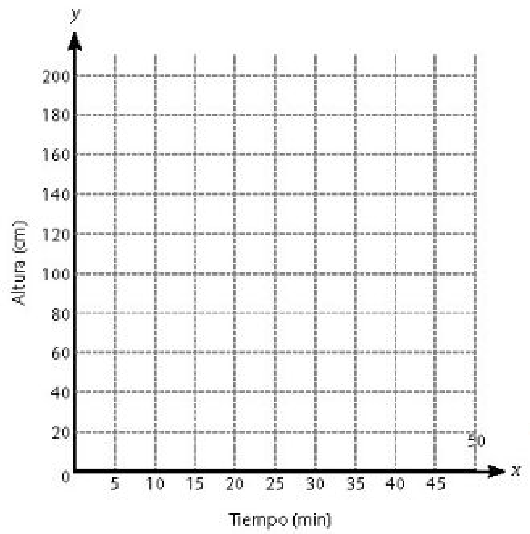


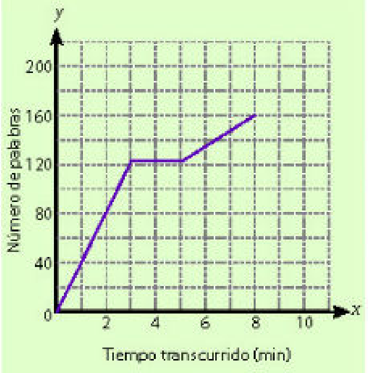
Figura 19.5
Cono truncado



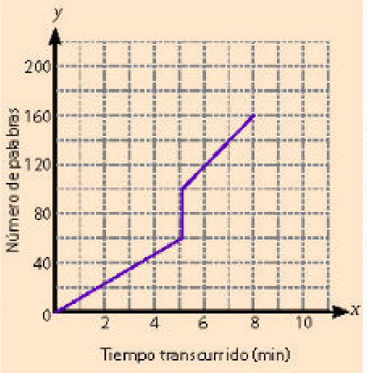
Gráfica 19.27

3. Teresa captura en la computadora un texto a un ritmo de 35 palabras por minuto durante tres minutos. Descansa dos minutos y luego continúa por tres minutos más escribiendo 20 palabras por minuto.

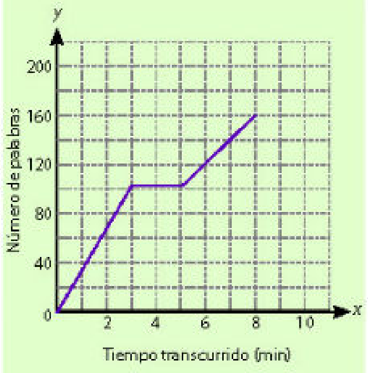
a) ¿Cuál de las siguientes gráficas describe el número de palabras que Teresa captura en esos ocho minutos? ________ Argumenta tu respuesta. ____________________



Gráfica 19.28



Gráfica 19.29



Gráfica 19.30

b) ¿Cuántas palabras escribió en los primeros tres minutos? ____________
c) ¿Cuántas palabras escribió del minuto tres al cinco? ________ ¿Y del cinco al ocho? ________
d) ¿Cuántas palabras escribió en total? ____________
e) ¿Coinciden los datos de los incisos *b*, *c* y *d* con la gráfica que elegiste? Si hay discrepancia, revisa el procedimiento que seguiste y haz las correcciones pertinentes.

Reúnanse en equipo y comparen sus respuestas a las preguntas anteriores. Comenten sobre la utilidad de las gráficas cuando se saben interpretar adecuadamente. Analicen y respondan la siguiente pregunta: ¿De qué manera la interpretación de gráficas puede aplicarse en situaciones de la vida cotidiana? Con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre sus conclusiones.

Planteen una situación semejante a la del problema del apartado "Llenado de recipientes" y pídanle a un compañero que trace la gráfica correspondiente. Luego él debe trazar una gráfica parecida a las del problema, inciso *b*, del apartado "Funciones de velocidad contra tiempo", y tú tienes que escribir una situación que sea adecuada a la gráfica. Comenten tanto sus resultados como los procedimientos que emplearon para trazar la gráfica y proponer la situación. Si tienen dudas, soliciten la guía de su maestro.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Distancia **Velocidad** **Tiempo**

Lección 20 Probabilidad de eventos independientes

El alumno aprenderá a:
Calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Problema de investigación

En parejas, lean el problema que se plantea y respondan la pregunta.

- Se lanza un dado y se observa la cara que sale. Si A es el evento "Sale un múltiplo de 2" y B el evento "Sale un múltiplo de 3":

¿Los eventos A y B son independientes? ____________ Justifiquen su respuesta.

Eventos que influyen en otros

Todos tenemos la idea de que hay características o cualidades que se influyen de alguna manera y otras que no se influyen; esta noción es la base del concepto de independencia de eventos. Haz la siguiente actividad.

Actividad 1. En equipos de tres alumnos lleven a cabo lo que se pide en el problema.

Problema. En cada inciso se proponen dos eventos. Indiquen si son eventos independientes y justifiquen su respuesta.

a) A: Una persona tiene ojos oscuros. B: Una persona tiene cabello oscuro.
¿Son independientes? ________ ¿Por qué? ________

b) A: Un día que llueve. B: Un día es jueves.
¿Son independientes? ________ ¿Por qué? ________

c) A: Una persona fuma mucho. B: Una persona se dedica a la política.
¿Son independientes? ________ ¿Por qué? ________

d) A: Una persona fuma mucho. B: Una persona está enferma de los bronquios.
¿Son independientes? ________ ¿Por qué? ________

e) A: Una calle es muy transitada. B: Una calle tiene árboles en las banquetas.
¿Son independientes? ________ ¿Por qué? ________

Reúnanse con otro equipo y contrasten sus argumentos. Cada equipo debe proponer dos eventos y preguntar al otro equipo si son eventos independientes. Lleguen a un acuerdo sobre cuál o cuáles son los argumentos más adecuados.

Eventos independientes

En ocasiones no es tan sencillo saber si dos eventos son independientes y, para determinarlo, es necesario investigar más. En la lección 6 aprendiste una definición de eventos independientes, complétala a continuación:

- Dos eventos de una experiencia aleatoria son independientes si ____________

Aplica la definición en la actividad 2.

Actividad 2. Formen equipos para leer lo que se propone en el problema y respondan lo que se pide.

Problema. En una rifa se tienen 4 tarjetas con premio y 16 sin premio, cada tarjeta se mete en un sobre que puede ser rojo o azul. Se coloca una tarjeta con premio y 4 sin premio en sobres rojos, y 3 tarjetas con premio y 12 sin premio en sobres azules. Los 20 sobres se colocan en una urna y se revuelven bien.

a) Completa la tabla 20.1 con base en la información del problema.

Tabla 20.1. Tarjetas premiadas y no premiadas en sobres de colores

	Sobres rojos	Sobres azules	Total
Tarjetas con premio			
Tarjetas sin premio			
Total			

b) A partir de los resultados de la tabla 20.1, contesten:

i) Al sacar aleatoriamente un sobre de la urna, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una tarjeta con premio? ____________

ii) Al sacar un sobre rojo de la urna, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una tarjeta con premio? ____________

c) ¿Son independientes el evento A: Sacar un sobre de color rojo y el evento B: Sacar un sobre con una tarjeta premiada? ________ Justifiquen su respuesta. ________

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, busquen una forma de representar la información relacionada con este problema para justificar sus resultados.

Propongan otras distribuciones de los premios en los sobres. ¿Los eventos del inciso c son independientes con esta nueva distribución? ¿Hay más casos en los que los eventos sean independientes o sólo en la distribución que se hace en el problema?

Actividad 3. Formen parejas para leer lo que se propone en el problema y respóndanlos.

Problema. En cada inciso se describen dos situaciones. En las situaciones A se pide calcular la probabilidad de un evento y en las situaciones B se pide calcular la probabilidad del mismo evento, pero sabiendo que ha ocurrido otro evento.

a) Situación A. Se tira un dado.

Situación B. Se tira un dado y se obtiene un múltiplo de 2.

i) En la situación A, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea un múltiplo de 3?

ii) En la situación B, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea un múltiplo de 3?

iii) ¿Los eventos "Sacar un sobre de color rojo" y "Sacar un premio" son eventos independientes? ______ Justifiquen su respuesta.

b) Situación A. Se lanzan un dado y una moneda.

Situación B. Se lanzan un dado y una moneda cae águila.

i) En la situación A, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 5? ______

ii) En la situación B, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 5? ______

iii) ¿Son independientes el evento C: Cae águila y el evento D: Sale el número 5? ______ Justifiquen su respuesta. ______

c) Situación A. Se lanza un dado.

Situación B. Se lanza un dado y sale un número par.

i) Para la situación A, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número impar? ______

ii) En la situación B, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número impar? ______

iii) ¿Son independientes los eventos E: Se obtiene un número par y F: Se obtiene un número impar? ______ Justifiquen su respuesta. ______

Conjunción de eventos

Con base en la mezcla de varios eventos de una experiencia aleatoria, es posible determinar otros eventos. Una de las formas más comunes es la conjunción de dos eventos.

Conjunción de dos eventos

La **conjunción** de dos eventos (A y B) es un tercer evento que se denota con **$A \cap B$**. Se dice que ocurre $A \cap B$ cuando en una experiencia aleatoria ambos eventos ocurren simultáneamente.

Actividad 4. Formen equipos para leer lo que se propone en cada problema y respondan lo que se pide.

Problema 1. Se lanza un dado y se consideran los eventos A: "Sale un múltiplo de 2" y B: "Sale un múltiplo de 3".

a) Con base en los eventos A y B, enlisten los elementos del evento $A \cap B$ = ______

b) Calculen las siguientes probabilidades:

i) P(A) = ______

ii) P(B) = ______

iii) $P(A \cap B)$ = ______

c) ¿Los eventos A y B son independientes? ______ Justifiquen su respuesta. ______

Problema 2. Se lanzan un dado y una moneda. Se consideran los eventos C: "Se obtiene el número 5" y D: "Cae águila".

a) Con base en los eventos C y D, enlisten los elementos del evento $C \cap D$ = ______

b) Calculen las siguientes probabilidades:

i) P(C) = ______

ii) P(D) = ______

iii) $P(C \cap D)$ = ______

c) ¿Los eventos C y D son independientes? ______ Justifiquen su respuesta. ______

Problema 3. Se lanza un dado y se consideran los eventos A: "Se obtiene un número impar" y B: "Se obtiene un número par".

a) Con base en los eventos A y B, enlisten los elementos del evento $A \cap B$ = ______

b) Calculen las siguientes probabilidades:

i) P(A) = ______

ii) P(B) = ______

iii) $P(A \cap B)$ = ______

c) ¿Los eventos A y B son independientes? ______ Justifiquen su respuesta. ______

Regla del producto para eventos independientes

A partir de los resultados que obtuvieron en la actividad 4, se presenta la siguiente propiedad de eventos independientes.

Regla del producto

Si los eventos A y B de una experiencia aleatoria son **independientes** entonces se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (1)$$

E, inversamente, si dos eventos A y B cumplen la condición (1) entonces los eventos son independientes.

Problemas

En parejas, resuelvan en su cuaderno los problemas que se formulan.

1. Los dispositivos llamados *apuntadores* son discos divididos en sectores de diferente color con una flecha cuyo eje está en el centro. Se puede hacer girar la flecha que se detiene aleatoriamente en cualquier posición. Los eventos de los apuntadores de las figuras 20.1 y 20.2 son independientes entre sí.

   a) En los apuntadores de la figura 20.1, la probabilidad de que la flecha quede en el sector rojo para cada apuntador es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de que las flechas de ambos apuntadores señalen el color rojo? ____________

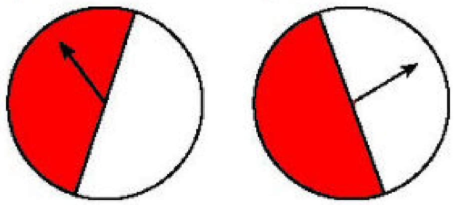


Figura 20.1 Apuntadores

   b) La probabilidad de que la flecha se detenga en el sector rojo para el apuntador de la figura 20.2*a* es $\frac{1}{4}$ y para el apuntador de la figura 20.2*b* es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer girar las flechas queden señalando el sector rojo en ambos apuntadores? ____________

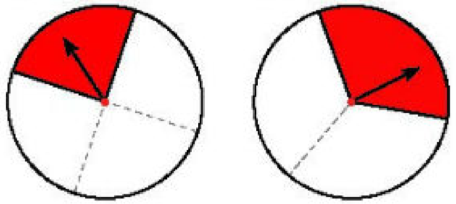


Figura 20.2 Apuntadores

2. En un laboratorio farmacéutico están probando las reacciones adversas a un medicamento (RAM) ansiolítico en personas diabéticas y no diabéticas. Observaron a 28 pacientes que tomaron el ansiolítico, 7 diabéticos y 21 no diabéticos. Los resultados obtenidos fueron que 2 pacientes diabéticos y 6 no diabéticos tuvieron reacciones adversas, mientras que 5 diabéticos y 15 no diabéticos no mostraron RAM.

   a) Con la información anterior completen la tabla 20.2.

Tabla 20.2 RAM a un ansiolítico entre diabéticos y no diabéticos

	Con reacciones adversas	Sin reacciones adversas	Total
Con diabetes			
Sin diabetes			
Total			

   b) Tomando en cuenta los datos de la muestra, ¿son independientes los eventos A: Ser diabético y B: Presentar reacciones adversas? ____________ Argumenten su respuesta. ____________

3. En dos urnas (A y B) se colocan bolas marcadas con los números 1 o 2. No se sabe la cantidad de bolas con cada número que hay en las urnas. Se extrae una bola de la urna A e, independientemente, otra de la urna B y con ellas se forma un número de dos cifras. Por ejemplo, si en la urna A sale 2 y en la B también 2, se forma el número 22. Se denotará con "22" al evento "Se forma el número 22" y así con los demás números. Se tiene las probabilidades de $P(11) = \frac{1}{6}$ y $P(12) = \frac{1}{2}$.

   Llamen $P_A(1)$ y $P_A(2)$ a la probabilidad de obtener, respectivamente, 1 y 2 en la urna A. Para la urna B denoten con $P_B(1)$ y $P_B(2)$ a la probabilidad de obtener 1 y 2, respectivamente.

   a) Escriban argumentos para justificar las siguientes igualdades:
      i) $P_A(1) + P_A(2) = 1$
      ii) $P_B(1) + P_B(2) = 1$

   b) Encuentren las probabilidades de los eventos:
      i) A: Se forma el número 21.
      ii) B: Se forma el número 22.

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Si existen discrepancias, expliquen cómo abordaron el problema para la justificación de las respuestas. Por ejemplo, en el problema 1 pueden construir dos apuntadores con diferentes probabilidades.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los siguientes problemas.

1. En un grupo de 105 personas hay 35 hombres y 70 mujeres. De los 35 hombres, 20 son deportistas, y de las 70 mujeres, 40 son deportistas. Se elige una persona al azar. Considera los eventos H: "Ser hombre", M: "Ser mujer" y D: "Ser deportista".

   a) Con base en los eventos H y D, enlista los elementos del evento $H \cap D$.

   b) Calcula las siguientes probabilidades:
      i) $P(H)$
      ii) $P(D)$
      iii) $P(H \cap D)$

   c) ¿Los eventos H y D son independientes? Justifica tu respuesta.

   d) Considera los eventos M y D, enlista los elementos del evento $M \cap D$.

   e) Calcula las probabilidades:
      i) $P(M)$
      ii) $P(M \cap D)$

f) ¿Los eventos M y D son independientes? Justifica tu respuesta.

2. Se tienen 24 globos —blancos y rojos— en los que se colocarán 8 papeles con premio y 16 sin premio. Se colocaron 3 papeles con premio y 6 sin premio en los globos blancos (un papel por globo). Mientras que en los globos rojos se colocaron 5 papeles con premio y 10 sin premio.

a) Completa la tabla 20.3.

Tabla 20.3 Papeles premiados y sin premio en globos rojos y blancos

	Globos blancos	Globos rojos	Total
Con premio			
Sin premio			
Total			

b) Los 24 globos se colocan en una caja, se mezclan y se saca uno aleatoriamente. ¿Son independientes los eventos A: Sacar globo rojo y B: Obtener premio? Argumenta tu respuesta.

Reúnanse en equipos y comparen sus respuestas. Comenten y propongan aplicaciones en las que sea importante saber si dos eventos son independientes.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Eventos independientes **Conjunción de dos eventos** **Regla del producto de probabilidades**

Evaluación

Lee cada situación y elige la respuesta correcta.

Situación 1. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha, con ella se construye una caja (sin tapa) de 840 cm³ cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes.

1. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

a) 16 cm × 20 cm
b) 10 cm × 14 cm × 6 cm
c) 20 cm × 7 cm × 6 cm
d) 13 cm × 9 cm × 6 cm

a b c d

Situación 2. En la figura E3.1, se muestra un tinaco que puede llenarse con las llaves A y B. La primera tarda en llenarlo 15 minutos menos que la otra sola; las dos juntas lo llenan en 56 minutos.

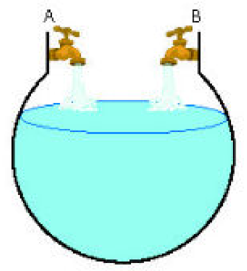


Figura E3.1

2. ¿Qué ecuación modela la situación de llenado con las llaves A y B?

a) $y^2 + 15y = 56$
b) $y^2 + 127x - 840 = 0$
c) $y^2 - 127y + 840 = 0$
d) Otra. Escríbela ____________

a b c d

3. Con base en la ecuación que elegiste, ¿cuánto tarda en llenarlo cada llave por separado?

a) 20.5 min y 35.5 min
b) 90 min y 105 min
c) 105 min y 120 min
d) 120 min y 135 min

a b c d

Situación 3. En la figura E3.2, se muestra un triángulo equilátero (triángulo *ABC*). Sobre el lado $\overline{BC}$ se elige un punto *E* cualquiera (diferente de *B* y *C*). Se construye sobre el segmento $\overline{BE}$ otro triángulo equilátero (triángulo *BED*), donde *D* es el tercer vértice del triángulo equilátero con base $\overline{BE}$. Finalmente se traza el segmento $\overline{DE}$.

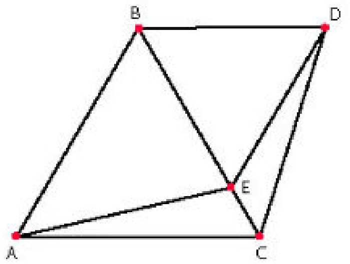


Figura E3.2

4. ¿Cuál de las siguientes es una pareja de triángulos congruentes? Argumenta tu respuesta.

a) Los triángulos *ABC* y *BDC*

c) Los triángulos *ABE* y *CBD*

b) Los triángulos *ABE* y *BDE*

d) Los triángulos *AEC* y *DEC*

a b c d

Situación 4. A fin de medir el ancho de un río que no se puede cruzar, se coloca en cada lado del río una estaca cerca de la orilla, como se muestra en la figura E3.3. Para calcular la distancia entre las estacas sin cruzar el río, se determina la dirección de las líneas $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$, donde *Q* es el punto donde está la estaca accesible y *R* un punto arbitrario en la misma orilla del río. Se pueden marcar los puntos *S*, *T* y *U* de tal manera que se cumple $\overline{RT} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{RQ} \parallel \overline{US}$.

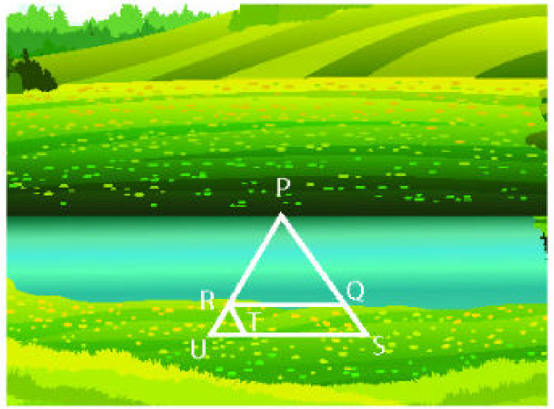


Figura E3.3

5. Las medidas de los segmentos $\overline{RQ}$, $\overline{RT}$ y $\overline{TS}$ son:

$$\overline{RQ} = 30 \text{ m}, \overline{RT} = 3.5 \text{ m y } \overline{UT} = 2 \text{ m}.$$

¿Cuál es el ancho del río, que se representa con el segmento $\overline{PQ}$?

a) $\overline{PQ} = 40$ m

b) $\overline{PQ} = 17.14$ m

c) $\overline{PQ} = 52.5$ m

d) $\overline{PQ} = 31$ m

a b c d

Bloque 4

En una presa es importante describir la razón de llenado y vaciado, particularmente en las situaciones en que se prevé un desfogue. Presa del río Drina en Serbia.

Un vistazo

En este bloque se estudiarán las sucesiones que crecen en forma cuadrática y las expresiones que las generan, para ello se utiliza el concepto de ecuaciones simultáneas. Como parte del estudio de la geometría del espacio, se introducen las superficies y cuerpos de revolución, en particular, el cilindro y el cono. Se analizan las relaciones entre los ángulos agudos y los catetos de un triángulo rectángulo, como un paso preliminar al estudio de las razones trigonométricas. Se ve el tema de pendiente de una recta, después se continúa con las razones trigonométricas. Se introduce el concepto de razón de cambio, que es crucial en el estudio de funciones. El tema de funciones prosigue con el análisis de la razón de cambio. Por último, se introduce el concepto de dispersión de un conjunto de datos y dos formas de medirla: el rango y la desviación media.

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados
• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión
• Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
• Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Lección 21 Sucesiones cuadráticas

El alumno aprenderá a:
Obtener una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Problema de investigación

En parejas, hagan lo que se pide.

- En la figura 21.1, se muestran los números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21,...

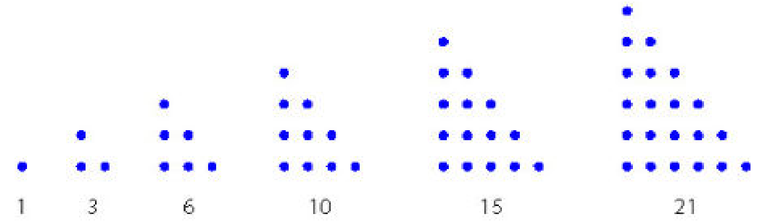


Figura 21.1 Números triangulares

¿Cuál es la fórmula que define el enésimo término de la sucesión? ____________________

Comparen las fórmulas que encontraron con las de otra pareja, verifiquen que se cumplan en todos los casos. Finalmente, hagan un reporte y entréguenlo a su maestro.

Expliquen con detalle el procedimiento que siguieron para obtener dichas fórmulas. ¿Qué similitudes o qué diferencias encontraron en sus fórmulas? Si pueden simplificarlas, háganlo.

Actividad 1. En equipos de tres alumnos, efectúen lo que se pide en los incisos.

Problema 1. En la figura 21.2, se muestra la sucesión de los cuatro primeros números cuadrados.

a) Dibuja en los espacios correspondientes las imágenes del quinto y sexto número cuadrado. ¿Por cuántos círculos estaría compuesto el quinto número cuadrado? ____________. ¿Y el sexto? ____________

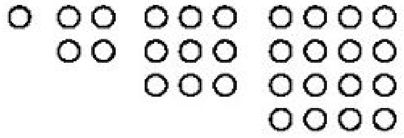


Figura 21.2 Números cuadrados

b) Escriban el número de círculos que aparecen en el primer número cuadrado, el segundo, el tercero y el cuarto de la figura 21.2.

____, ____, ____, ____, ____, ____

c) ¿Qué observan en esta sucesión de números? ____________________

d) ¿De cuántos círculos está compuesto el vigesimoquinto número cuadrado? ____________. ¿Por qué? Justifiquen su respuesta. ____________

e) ¿Qué expresión denota al enésimo término de la sucesión? ____________

f) ¿Qué relación encuentran entre los dibujos asociados a la sucesión de la figura 21.2 y los de la sucesión de la figura 21.1? ____________

g) Para enunciar el paso entre los términos de estas sucesiones, completen lo siguiente:

Dado el enésimo término cuadrado, su correspondiente número triangular se obtiene: ____________

Problema 2. En la figura 21.3, se muestra la sucesión de números rectangulares.

a) Dibujen los círculos que faltan en la sucesión de los primeros seis números rectangulares, que aparecen en la figura 21.3, y escriban el número de círculos que integran cada uno de los rectángulos formados.

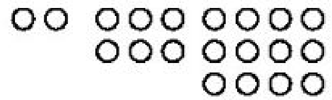


Figura 21.3 Números rectangulares

____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

b) ¿Con cuántos círculos se formaría al decimoséptimo número rectangular? ¿Y para el quincuagésimo cuarto? ____________

c) ¿Cuál será la fórmula para el enésimo término? ____________

d) Si encuentran una simplificación para la expresión del inciso *c*, escríbanla. ____________

Comparen ahora la sucesión de números rectangulares con la de números triangulares. ¿Qué relación hay entre el primer término ($n = 1$) de ambas sucesiones? ____________ ¿Para $n = 2$? ____________

¿Para $n = 3$? ____________ ¿Y para los enésimos términos? ____________ ¿Qué conclusiones pueden inferirse de las relaciones entre las tres sucesiones que analizaron? Resuman sus observaciones a partir del llenado de la tabla 21.1.

Tabla 21.1 Relación de sucesiones

Nombre de la sucesión	Fórmula del enésimo término
Números cuadrados	
Números rectangulares	
Números triangulares	

Diferencias entre los elementos contiguos de una sucesión

Actividad 2. En parejas, hagan lo que se pide en esta actividad.

Problema. En los incisos *a*, *b* y *c* se dan tres sucesiones de números para obtener las sucesiones de sus diferencias y después las diferencias de las diferencias hasta llegar a una sucesión formada únicamente por ceros.

a) En el primer renglón de la tabla 21.2 se muestra la sucesión de números: 1, 3, 6, 10, 15, 21,... En este caso, tales números corresponden al número de puntos que conforman a los números triangulares. Completen el segundo renglón (nivel 1) con las diferencias entre los términos sucesivos de la sucesión; por ejemplo, con los dos primeros términos se tiene: $3 - 1 = 2$. Hagan lo mismo en el tercer renglón (nivel 2) escribiendo las diferencias de las diferencias. Por ejemplo, el primer término en el nivel 2 sería 1. (¿Saben por qué? Justifiquen su respuesta.) Escriban lo correspondiente para el cuarto renglón (nivel 3).

Tabla 21.2 Diferencias de una sucesión

Sucesión	1	3	6	10	15	21
Nivel 1 →						
Nivel 2 →						
Nivel 3 →						

b) Completen la tabla 21.3 de la misma forma que en el inciso *a* utilizando la sucesión de los números cuadrados.

Tabla 21.3 Diferencias de la sucesión de números cuadrados

Sucesión	1	4	9	16	25	36
Nivel 1 →						
Nivel 2 →						
Nivel 3 →						

c) Completen ahora la tabla 21.4 con la sucesión de números rectangulares.

Tabla 21.4 Diferencias de una sucesión

Sucesión	2	6	12	20	30	42
Nivel 1 →						
Nivel 2 →						
Nivel 3 →						

Reúnanse con otra pareja y comparen las tablas. Verifiquen que los números que obtuvieron sean los mismos; si no es así, revisen sus procedimientos, elaboren un reporte y entréguenlo a su maestro. Comenten en este reporte las características de las sucesiones derivadas

que fueron anotadas en cada nivel. Escriban en seguida los términos de cada una de las sucesiones obtenidas derivadas a partir de los números triangulares.

Sucesión nivel 1: __________

Sucesión nivel 2: __________

Sucesión nivel 3: __________

Enlisten las sucesiones derivadas de los números cuadrados y rectangulares, y respondan esta pregunta: ¿En qué renglón la sucesión obtenida es igual a 0? __________

En general, dada una sucesión S_n se puede encontrar una sucesión derivada mediante las diferencias entre elementos contiguos de la sucesión. ¿Qué propiedades relevantes observaron en las sucesiones derivadas? __________

Problemas

En equipos, resuelvan los problemas.

1. En la tabla 21.5, se muestra el primer término de una sucesión y la primera diferencia del nivel 1. Además, se muestran las diferencias de los niveles 2 y 3. Encuentren los valores de la sucesión y los valores que faltan en el nivel 1.

Tabla 21.5 Sucesión por determinar

Sucesión	2					
Nivel 1 →	3					
Nivel 2 →	7	7	7	7		
Nivel 3 →	0	0	0			

2. Lean la definición del siguiente recuadro.

> **Sucesión de grado *N***
>
> Una sucesión es de grado N si la sucesión de sus diferencias en el nivel $N + 1$ es nula.

Por ejemplo, la sucesión 1, 4, 9, 16, 25,... es de grado 2 porque la sucesión derivada del nivel 3 es nula. Indiquen de qué grado son las siguientes sucesiones:

- 5, 13, 21, 29, 37,... La sucesión es de grado ______
- 5, 13, 25, 41, 61,... La sucesión es de grado ______
- 5, 13, 23, 35, 49,... La sucesión es de grado ______

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. En caso de discrepancia revisen los procedimientos, si no encuentran la fuente del error o la diferencia pidan asesoría a su maestro.

Sucesiones cuadráticas y la fórmula general

A partir de las actividades anteriores se tiene la siguiente definición.

Sucesiones cuadráticas

Se llaman **sucesiones cuadráticas** a las sucesiones de grado 2.

Actividad 3. En parejas, respondan lo que se pide.

Problema. Para la función cuadrática $N = an^2 + bn + c$ sustituyan los siguientes valores $a = b = \frac{1}{2}$ y $c = 0$.

a) Escriban el resultado de sustituir en la función los valores. $N =$ ________

b) Completen la tabla 21.6 sustituyendo los valores de los primeros seis números naturales en la función que obtuvieron en el inciso *a*.

Tabla 21.6 Sustitución en una función cuadrática

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$N =$ ______								

c) Muestren que la función $N = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$N = \frac{n(n+1)}{2}$$

Reúnanse con otra pareja y reporten cómo obtener la fórmula que genera una sucesión si se conocen los valores de la sucesión. Resuman en seguida los puntos importantes en ese procedimiento y, finalmente, entreguen el reporte a su maestro. ________

¿Qué relación tienen las sucesiones cuadráticas con la expresión cuadrática general $N = an^2 + bn + c$? ________

Obtención de la expresión general de una sucesión cuadrática

Actividad 4. En equipos de tres alumnos, hagan lo que se pide.

Problema. Observen la siguiente sucesión:

1 5 11 19 29 41 55 71

a) Verifiquen que se trata de una sucesión de segundo grado mostrando que sus diferencias en el nivel 3 son nulas.

b) Consideren la sucesión y la expresión general de una sucesión cuadrática de la forma $N = an^2 + bn + c$. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al término general de la sucesión?

i) $N = 3n^2 + 3n - 5$

ii) $N = 2n^2 + 2n - 3$

iii) $N = n^2 + n - 1$

c) Observen que los valores de *a*, *b* y *c* que son solución del problema también son solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b + c = 1$$

$$4a + 2b + c = 5$$

$$9a + 3b + c = 11$$

Verifiquen que la expresión que eligieron en el inciso *b* genera la sucesión original cuando se sustituyen los valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Busquen procedimientos para resolver el sistema de tres ecuaciones. Reflexionen si con esta actividad conocieron una técnica para encontrar la expresión general con la que se obtiene una sucesión cuadrática dada, hagan un reporte sobre el tema y entréguenlo a su maestro.

Actividad 5. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. Consideren la siguiente sucesión:

8 12 18 26 36 48 62 78

a) Verifiquen que sea una sucesión cuadrática.

b) Planteen el sistema de ecuaciones para encontrar la expresión cuadrática haciendo operaciones y sustituyendo los valores de *d*, *e* y *f*.

$$a1^2 + b1 + c = d$$

$$a2^2 + b2 + c = e$$

$$a3^2 + b3 + c = f$$

c) ¿Cuál de las siguientes ternas de valores (*a*, *b* y *c*) cumplen con el sistema de ecuaciones del inciso *b*?

i) $a = -5, b = -1, c = 14$ ii) $a = 2, b = 7, c = -1$ iii) $a = 1, b = 1, c = 6$

d) Sustituyan los valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$ para verificar que la expresión genera la sucesión original.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten cuáles son las diferencias en el procedimiento de la actividad 4 comparado con el de esta actividad. Hagan un reporte sobre la existencia de un procedimiento general para obtener la expresión general de una sucesión cuadrática y entréguenlo a su maestro. ________

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas de esta sección.

1. En la tabla 21.7, se muestran el primer término de una sucesión, la primera diferencia del nivel 1 y las diferencias de los niveles 2 y 3.
   a) Escribe los valores faltantes en la tabla 21.7.

Tabla 21.7 Sucesión por determinar

Sucesión	1					
Nivel 1 →	2					
Nivel 2 →	5	5	5	5		
Nivel 3 →	0	0	0			

   b) Escribe la expresión cuadrática del enésimo término de la sucesión que obtuviste en el inciso *a*.

   c) Muestra que la respuesta al inciso *b* se puede expresar de la siguiente forma:

$$N = \frac{5n^2 - 11n + 8}{2}$$

2. La expresión $N = 3x^2 + 5x - 6$ genera una sucesión.
   a) Enlista los primeros seis valores de la sucesión.
   b) Demuestra que los coeficientes: $a = 3$, $b = 5$, $c = -6$ son las soluciones del sistema:

$$a + b + c = 2$$
$$4a + 2b + c = 16$$
$$9a + 3b + c = 36$$

   c) Explica por qué los coeficientes de la expresión cuadrática son la solución del sistema.
3. Verifica que las siguientes sucesiones sean cuadráticas y encuentra una expresión general para sus términos.
   a) 1, 4, 9, 16, 25, 36
   b) 2, 6, 12, 20, 30, 42

En plenaria comparen sus respuestas y con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre la forma más práctica de encontrar el enésimo término de una sucesión. Hagan un reporte de la lección y entréguenlo a su maestro.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Sucesiones derivadas de otra sucesión **Grado de una sucesión** **Sucesión cuadrática**

Lección 22 Superficies y cuerpos de revolución

El alumno aprenderá a:
Analizar las características de los cuerpos que se generan al girar, sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Problema de investigación

De manera individual resuelve el siguiente problema.

- En la figura 22.1, se muestra un carrusel, en tanto que en la figura 22.2 se aprecia una réplica incompleta de la figura 22.1, a la cual se le quitaron los caballitos y se colocó una varilla azul en la parte externa.

Figura 22.1 Carrusel

Figura 22.2 Réplica del carrusel

Si la varilla azul de la réplica del carrusel dejara una estela por las posiciones en que pasa al dar vueltas, ¿qué figura formaría?

- Un rectángulo
- Un cilindro
- Un paralelepípedo

Explica tu respuesta.

Superficies de revolución

Actividad 1. En equipos, hagan lo que se pide. Necesitarán piezas de alambre rígido, pinzas para cortar y doblar el alambre.

Problema. Corten seis piezas de alambre de las siguientes medidas: tres de 12 cm y otras tres de 15 cm. Con las pinzas y dos piezas de alambre de cada una de las medidas construyan tres dispositivos que tengan las formas mostradas en la figura 22.3.

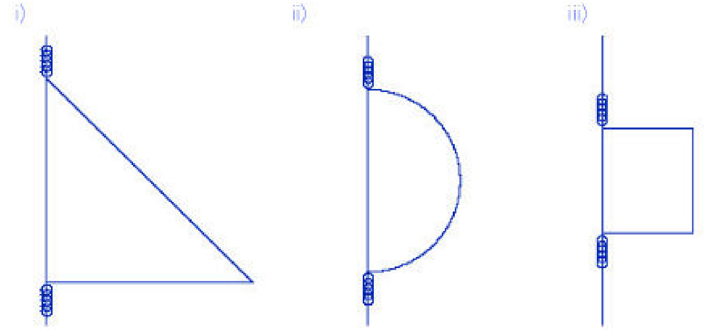


Figura 22.3
Figuras de alambre

a) Tomen cada dispositivo por los extremos del eje vertical y háganlos girar tan rápido como sea posible, procuren mantener el eje en una misma posición. Observen las figuras que forman los alambres al girar sobre su eje.

b) Dibujen en el siguiente recuadro las superficies de revolución que se formaron en cada caso.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus dibujos. ¿En qué son similares y en qué diferentes?

¿Por qué?

Si se moldean con plastilina cuerpos sólidos que tengan la forma de los dibujos que realizaron en el inciso *b*, ¿qué cuerpos serían?

Superficie de revolución

Superficie de revolución

Una **superficie de revolución** se genera mediante la rotación de una recta o una curva (llamada generatriz) alrededor de una recta directriz (denominada eje de rotación).

Problemas

En parejas, resuelvan los problemas. Pueden usar hojas blancas para hacer los trazos y dibujos que los ayuden a visualizar de mejor manera lo que se solicita.

1. Identifiquen en la figura 22.4 cuáles son superficies de revolución.
Justifiquen su respuesta.

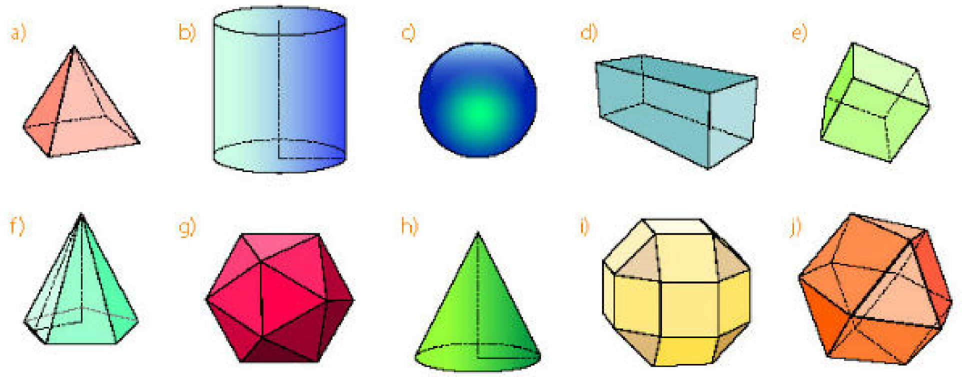


Figura 22.4 Cuerpos geométricos y superficies de revolución

2. En cada inciso escriban el número de la figura que corresponde a la descripción de la manera en que fue generada la superficie.

a) Fue generada por la rotación de un segmento de recta que es paralelo al eje de rotación. Figura:

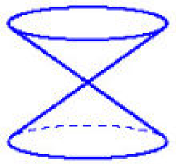


Figura 22.5

b) Fue generada por la rotación de una recta alrededor de un eje que se interseca en un punto. Figura:

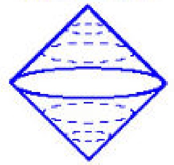


Figura 22.6

c) Fue generada por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro. Figura:

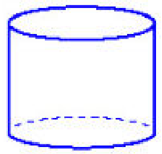


Figura 22.7

d) Fue generada por la rotación de un triángulo rectángulo cuyo eje es su hipotenusa. Figura:

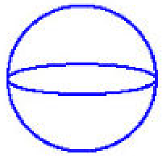


Figura 22.8

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Describan el modo en que se genera una superficie de revolución.

Cuerpos de revolución

Actividad 2. Reúnete con dos compañeros y lleven a cabo lo que se solicita en cada inciso.

Problema. Se tienen las superficies mostradas en la figura 22.9.

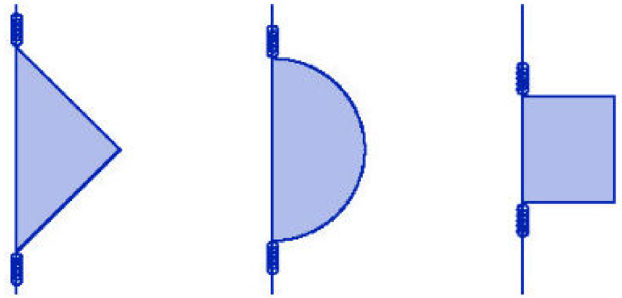


Figura 22.9 Figuras de alambre

a) Supongan que al hacer rotar cada una de las superficies de la figura 22.9 se va llenando cada punto por el que pasan. ¿Qué se forma?

i) Una superficie de revolución ii) Un cuerpo de revolución iii) No se sabe

b) Dibujen en su cuaderno los cuerpos formados por el giro alrededor del eje de cada una de las superficies de la figura 22.9.

c) Escriban una lista de cinco objetos de uso común que sean superficies o cuerpos de revolución. ______

d) Para las figuras 22.10, 22.11 y 22.12, hagan en su cuaderno lo siguiente:

i) Dibujen la superficie o curva que se obtiene al cortar cada objeto con un plano que incluya el eje de rotación.

ii) Dibujen la superficie o curva que se obtiene al cortar cada objeto con un plano perpendicular al eje de rotación.

iii) Escriban un enunciado en el que expresen sus observaciones.

Figura 22.10 Trompo

Figura 22.11 Jarrón

Figura 22.12 Picaporte

Comparen con otro equipo los enunciados que escribieron en el inciso *d(iii)*. Con base en sus enunciados respondan la pregunta: ¿Se relacionan el corte respectivo con la curva generatriz y con un círculo o una circunferencia? Si la respuesta no es afirmativa, vuelvan a formular sus enunciados de tal manera que se relacionen con estos conceptos.

Desarrollo de cilindros y conos

Actividad 3. En equipos, hagan lo que se pide. Necesitan cartulinas, juego de geometría, tijeras, pegamento y calculadora.

Problema 1. Supongan que se han construido con cartulina los desarrollos planos de la figura 22.13 y se recortan.

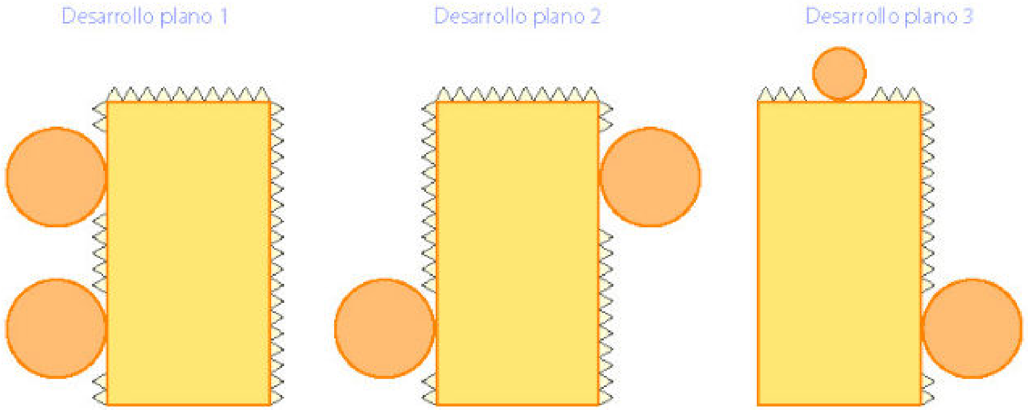


Figura 22.13

a) ¿Con cuál de los desarrollos planos de la figura 22.13 puede armarse un cilindro? ______

b) Si el largo del rectángulo en el desarrollo plano que eligieron en el inciso *a* es de 18.84 cm, ¿cuánto debe medir el radio de los círculos? ______

c) Si la altura del cilindro es de 3 cm, ¿qué dimensiones debe tener el rectángulo? ______

d) Escriban el procedimiento con el que se determinan las dimensiones del rectángulo que forma el desarrollo plano del cilindro si se conocen la altura y el radio de su base. ______

e) Dibujen en una cartulina el desarrollo plano de un cilindro con las dimensiones que obtuvieron en el inciso *b*.

Problema 2. Supongan que se han elaborado con cartulina los desarrollos planos de la figura 22.14 y después se recortan.

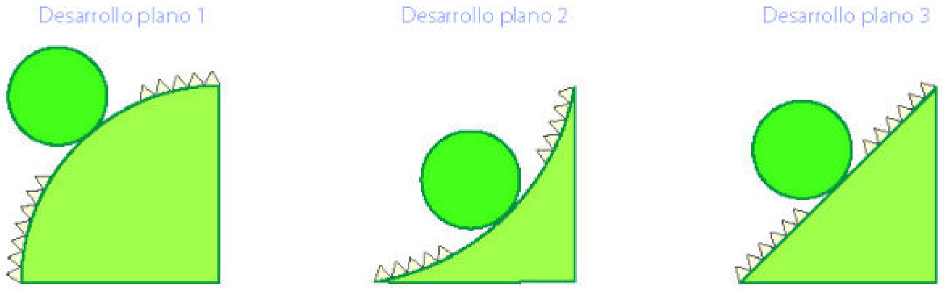


Figura 22.14

a) ¿Con qué desarrollo plano de la figura 22.14 puede armarse un cono? ______

b) En la figura 22.15, se muestra un cono en el que *O* es el centro de la base, *M* el vértice, *r* el radio, *h* la altura y *g* es la generatriz. Escriban estos elementos en el desarrollo plano del cono de la figura 22.16.

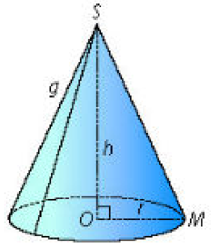


Figura 22.15

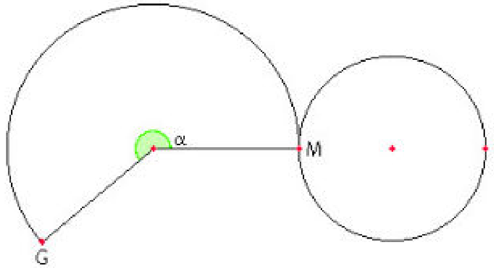


Figura 22.16

c) ¿Cómo se relacionan el radio de la base, la altura del cono y la longitud de su generatriz?

d) Si el radio del círculo mide 6 cm y su altura mide 8 cm, ¿cuánto mide *g*?

e) El desarrollo plano del cono tiene dos partes: la base, que es un círculo, y un sector circular, que es la superficie del cono. ¿Qué relación hay entre estas dos partes?

f) Dibujen en una cartulina un desarrollo plano con los valores del inciso *d* y armen el cono.

g) En general, ¿cómo se obtiene el ángulo para un desarrollo plano? Apliquen este método para obtener el ángulo α en su dibujo del inciso *f*.

Comparen sus conos con los de otros equipos. ¿Son todos iguales? En caso de que no sean iguales, mídanlos y vean qué cono tiene las medidas que se aproximan a las del inciso *g*. El equipo que haya construido este cono deberá explicar cómo hizo los cálculos y los trazos del desarrollo plano.

Repasa lo aprendido

En parejas, resuelvan los problemas que se plantean.

1. Tracen en su cuaderno las curvas que se muestran en la figura 22.17 y dibujen las superficies generadas alrededor del eje (el segmento más grueso).

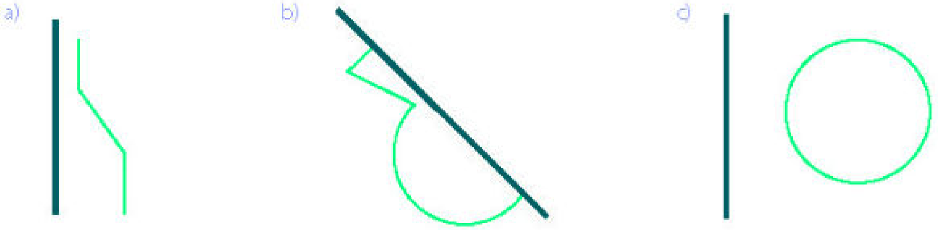


Figura 22.17 Curvas generatrices y ejes de rotación

2. La figura 22.18 es la representación del techo de una cabaña con forma de un cono cuya superficie de revolución fue generada por un triángulo rectángulo. Las dimensiones de éste se muestran en la figura.

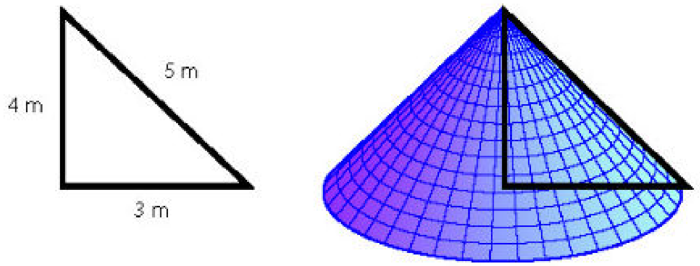


Figura 22.18 Representación del techo de una cabaña

a) ¿Cuál es el área del techo, es decir, el área superficial del cono?

b) Dibujen en una cartulina el desarrollo plano del cono cuya altura es de 3 cm y el radio de la base mide 4 cm. Calculen su superficie para comprobar que es el área que obtuvieron en el inciso *a*.

c) Propongan un procedimiento para calcular el volumen total del cono.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Superficie de revolución **Cuerpo de revolución** **Desarrollo de un cilindro**
Desarrollo de un cono

Lección 23 La pendiente de una recta y los catetos

El alumno aprenderá a: Analizar las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Problema de investigación

Haz de manera individual lo que se pide en cada inciso.

- En la figura 23.1, se muestran tres triángulos rectángulos con las medidas de sus catetos.

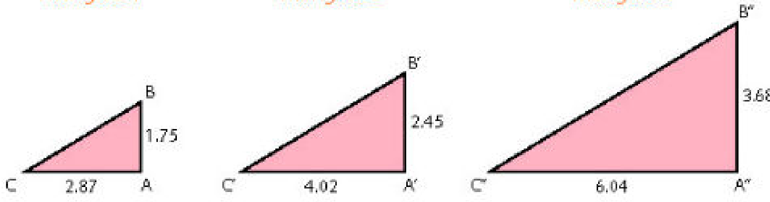


Figura 23.1 Triángulos rectángulos con las medidas de sus catetos

a) Obtén los cocientes con las medidas dadas de los segmentos (usa calculadora para redondear hasta milésimos).

i) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} =$ ______ ii) $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'A'}} =$ ______ iii) $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{C''A''}} =$ ______

b) En cada uno de los triángulos, ¿qué observas en los resultados obtenidos en el inciso *a* respecto a la medida de la hipotenusa? ______

c) ¿Qué medidas tienen los ángulos opuestos a los lados $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$? ______

d) ¿Puedes decir, sin medirlos previamente, cuáles serían las medidas de los ángulos opuestos a los lados $\overline{CA}$, $\overline{C'A'}$ y $\overline{C''A''}$? ¿Por qué? ______

e) ¿Los ángulos que obtuviste en el inciso *c* son congruentes entre sí? ______ ¿Por qué? ______

Al final de la lección regresa a estas preguntas y compara tus resultados. Si no coinciden, corrígelos.

Relaciones entre los ángulos de triángulos rectángulos y los catetos

Actividad 1. En parejas, hagan lo que se pide. Necesitan un juego de geometría.

Problema. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide 52.2°.

a) ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo del triángulo? ______

b) Con estas medidas de los ángulos agudos, ¿cuántos triángulos rectángulos pueden dibujarse? ______

c) Dibujen en su cuaderno cuatro triángulos rectángulos diferentes entre sí con un ángulo de 37.8° y un ángulo con el valor antes dado de 52.2°.

d) Al cateto opuesto al ángulo de 37.8° llámenlo *a* y al otro cateto *b*. Midan *a* y *b* en cada uno de los triángulos que dibujaron y obtengan los cocientes $\frac{a}{b}$ para cada triángulo. Enlisten los cocientes obtenidos. ______

e) ¿Qué observan en los resultados? ______

¿Por qué sucede esto? ______

Comparen sus procedimientos y respuestas con los de otra pareja. ¿Coinciden? Si la respuesta es afirmativa, preparen una presentación para mostrar sus resultados en un panel grupal. Si no coinciden, pidan orientación a su maestro para aclarar dudas y llegar a acuerdos sobre las respuestas más claras y prácticas.

Problemas

Haz individualmente lo que se pide en el problema.

Utiliza los triángulos rectángulos de la figura 23.2 para completar la tabla 23.1.

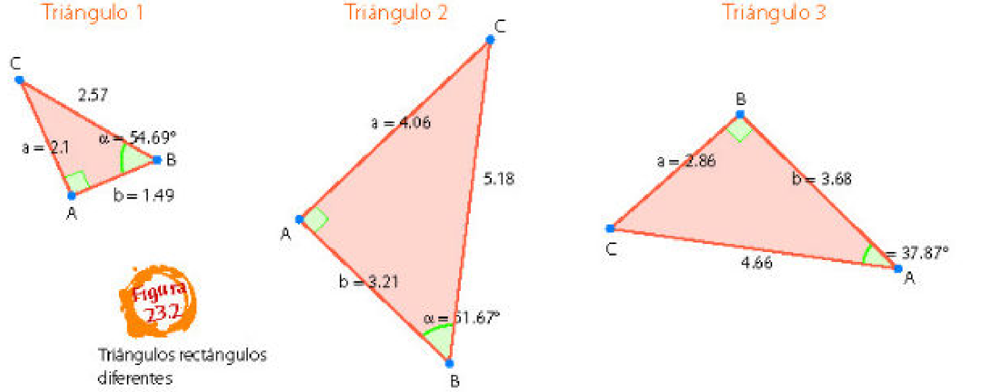


Figura 23.2 Triángulos rectángulos diferentes

Tabla 23.1 Relación entre los ángulos y los catetos en los triángulos rectángulos de la figura 23.2

	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3
Medida del cateto opuesto a α			
Medida del cateto adyacente a α			
$\frac{\text{Medida del cateto opuesto}}{\text{Medida del cateto adyacente}}$			

Intercambia tus respuestas con las de otro compañero. Si los resultados no coinciden, comenten acerca del procedimiento que realizaron para completar la tabla 23.1. Hagan un reporte y entréguenlo a su maestro.

Relaciones entre el valor de la pendiente de una recta y el valor del ángulo

Actividad 2. En equipos de tres alumnos hagan lo que se pide.

Problema 1. Tracen en su cuaderno un plano cartesiano y grafiquen la función $y = 2x + 1$. A la recta que obtuvieron llámenla l.

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente (m) de la recta? ______

b) Al punto donde l corta al eje de las abscisas llámenlo A. Marquen cualquier punto sobre la recta l y desígnenlo como B. Por B tracen una paralela al eje y; denoten con C el punto donde la paralela al eje y corta al eje x.

c) ¿Qué tipo de triángulo es ABC? ______

d) Midan el ángulo en el vértice A; llámenlo α y escriban su medida. ______

e) Midan $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ y obtengan el cociente $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ = ______

f) En otra hoja, tracen dos triángulos rectángulos ($A'B'C'$ y $A''B''C''$) de diferentes tamaños cuyas medidas de ángulos sean: $\angle A' = \angle A'' = \alpha$ y $\angle B' = \angle B'' = 90°$. Obtengan los cocientes $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$ y $\frac{\overline{B''C''}}{\overline{A''C''}}$.

g) Escriban las conclusiones a las que llegaron después de resolver el problema 1. ______

Problema 2. Dibujen en su cuaderno un plano cartesiano y en el mismo plano tracen las gráficas de las rectas $y = 1.5x - 2$ (recta l) y $y = 1.5x + 6.5$ (recta l'). ¿Cómo son entre sí las dos rectas? ¿Se cortan? Cuando dos rectas no se cortan se les llama: ______

a) Completen la tabla 23.2 y utilicen los puntos para trazar las rectas.

Tabla 23.2 Puntos para graficar dos rectas

x	$y = 1.5x - 2$	$y = 1.5x + 6.4$
0		
2		

b) ¿Cuál es el valor de la pendiente m de la recta l? ______ ¿Cuál es el valor de la pendiente m' de la recta l'? ______

c) ¿Cuánto mide el ángulo α que se forma con la recta l y con el eje de las abscisas? α = ______ ¿Cuánto mide el ángulo α' que se forma con la recta l' y con el eje de las abscisas? α' = ______

d) Repitan el problema 1 para cada una de estas dos rectas. Llamen A, B y C a los puntos que utilicen en la recta l y a los puntos que van a utilizar en la recta l' desígnenlos como A', B' y C'. B y B' corresponden a los vértices en los que se forma el ángulo recto; A y A' son los puntos de intersección de las rectas con el eje x, respectivamente. Obtengan los cocientes $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ y $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$.

e) Hay una serie de propiedades entre las rectas trazadas que resultan de los cálculos hechos en los incisos anteriores. Enlístenlas a continuación: ______

f) Tracen otra recta paralela a l, llámenla l'' y repitan lo que hicieron en los incisos b y c.

Al terminar escriban una conjetura respecto a la relación entre las pendientes de las rectas trazadas (ℓ, ℓ', ℓ'') y los cocientes del cateto opuesto (inciso d) entre el cateto adyacente que calcularon.

Reúnanse con otro equipo y revisen lo que realizaron en las actividades 1 y 2. Contrasten las conjeturas que elaboraron aquí en torno del tema de esta sección. Escriban un reporte sobre lo realizado y entréguenlo a su maestro. Con la guía de su maestro organicen un panel donde se expongan las conclusiones que han obtenido y sus conjeturas.

Problemas

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. En el bloque 5 del segundo grado de Matemáticas, estudiaste lo que significa el parámetro m en la expresión $y = mx + b$, cuya gráfica es una recta. La literal m representa la razón entre lo que se "sube" y lo que se "avanza" sobre una pendiente. Por eso a m se le llama pendiente. ¿Qué acepciones tiene en el lenguaje común la palabra *pendiente*? ______

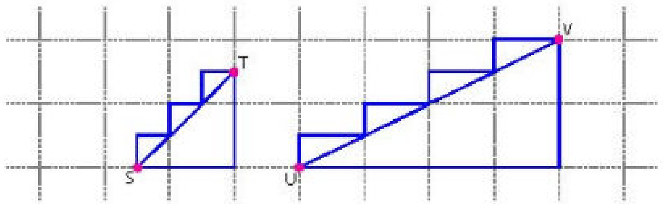
2. En la figura 23.3, se muestran dos escaleras.

a) ¿Cuál está más empinada? ¿Por qué? Justifica tu respuesta. ______

b) Con base en los diagramas de la figura 23.3, determina: cuál es la pendiente de cada una de las rectas que pasan por los puntos S y T, y U y V.

Figura 23.3

Dos escaleras con pendiente distinta



c) ¿Qué relación existe entre la inclinación de las rectas que pasan por $\overline{ST}$ y por $\overline{UV}$ y las pendientes? ______

d) Observa en cada escalera el ángulo que forman los segmentos $\overline{ST}$ y $\overline{UV}$ con el suelo (horizontal). ¿Cuál es mayor? ______

e) ¿Puedes decir cuál es la relación que hay entre el ángulo y la pendiente? ______

Reúnete con dos compañeros para analizar los resultados y los procedimientos que siguieron. Lleguen a un acuerdo sobre la relación entre el ángulo y la pendiente, elaboren un reporte y entréguenlo a su maestro. Si no llegan a un acuerdo pidan apoyo a su maestro.

Uso de las TIC

En parejas, lleven a cabo lo que se pide utilizando el software GeoGebra.
Repitan la actividad 2 utilizando el software. Observen que ahora pueden trazar más de tres rectas paralelas.
Con base en lo que observaron, ¿sigue cumpliéndose su conjetura? ________ Expliquen por qué.

____

____

Relación entre la pendiente, los catetos y los ángulos

Las rectas $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$ son paralelas si $m_1 = m_2$. Asimismo, siempre que $m_1 = m_2$ las rectas son paralelas.

Dados los puntos A y B en una recta, puede completarse un triángulo rectángulo ABC pasando una paralela al eje x por A y una paralela al eje y por B. Entonces el cociente $\frac{\text{cateto opuesto a } \measuredangle A}{\text{cateto adyacente a } \measuredangle A}$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por A y B.

Si dos triángulos rectángulos tienen ángulos agudos iguales α y α', respectivamente, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha'}{\text{cateto adyacente a } \alpha'}$$

El cociente $\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$ se llama tangente del ángulo α o simplemente tangente de α y se denota como: $\tan(\alpha)$ o $\tan \alpha$.

Si una recta l con ecuación $y = mx + b$ forma un ángulo ω con el eje x, entonces $m = \tan(\omega)$.

Problemas

En parejas, resuelvan los problemas de esta sección.

1. Con una calculadora científica obtengan el valor de la tangente para cada inciso; asegúrense de utilizar el modo de trabajo para ángulos en grados: "deg".

   - tan (0°) = ________
   - tan (27°) = ________
   - tan (63°) = ________
   - tan (90°) = ________
   - tan (117°) = ________
   - tan (153°) = ________
   - tan (180°) = ________
   - tan (207°) = ________
   - tan (243°) = ________
   - tan (270°) = ________
   - tan (297°) = ________
   - tan (333°) = ________

2. Analicen los resultados, agrupados por columnas, que obtuvieron en el punto 1. Comenten entre ustedes acerca de las regularidades que se pueden percibir cuando se llevan a cabo cálculos en ángulos que difieren en magnitud por múltiplos de 90°. Anoten las conclusiones en su cuaderno.

3. Usando una calculadora, ¿pueden revertir las operaciones realizadas para obtener la medida de un ángulo si se conoce el valor de su tangente? Verifiquen y amplíen su respuesta utilizando los resultados del punto 1.

Organicen un panel grupal con su maestro donde algunas parejas resuelvan cada problema en el pizarrón. Comparen sus procedimientos con el de otros compañeros. Si su resultado es distinto localicen dónde se equivocaron y corríjanlo.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. Utiliza un transportador y una regla para dibujar cuatro rectas que tengan los siguientes grados de inclinación respecto al eje de las abscisas y calcula la pendiente de cada recta.

   a) 27° b) 55° c) 75° d) 88°

2. Escribe la ecuación para cada una de las rectas siguientes y dibújalas usando un plano cartesiano.

   a) La recta que pasa por el punto (0, –2) y forma un ángulo de 33° con el eje de las abscisas.

   b) La recta que pasa por el origen (0, 0) y forma un ángulo de 64°.

   c) La recta que pasa por los puntos (1.5, –4) y (–2, 3.2).

   d) Además, ¿puedes decir cuál es su pendiente? ¿Cuál es el ángulo que forma con el eje de las abscisas?

3. Una escalera se coloca a 8 m de la pared en la que se recarga. Si el ángulo de inclinación de la escalera es de 40° respecto al piso, ¿a qué altura llega la escalera respecto al piso?

4. Luisa observa con unos binoculares un ave que está en la punta de un árbol. El árbol mide 12 m de altura y Luisa se encuentra a 7 m de la base del árbol y sus ojos están a 1.65 m del piso. ¿En qué ángulo, respecto a la horizontal, están apuntando sus binoculares?

Reúnete con un compañero, revisen y comparen sus soluciones. Identifiquen las soluciones correctas y las fuentes de error. Si algo no queda claro pidan apoyo a su maestro.

Glosario

El concepto que debe agregarse al glosario es:

Tangente de un ángulo

Lección 24 Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

El alumno aprenderá a:
Analizar las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Problema de investigación

En parejas, analicen el problema y respondan las preguntas.

- Alberto sube una montaña que tiene una inclinación promedio de 12° y una altura de 1 200 m.
  - a) ¿Cuántos kilómetros deberá recorrer para llegar a la cima si camina en línea recta? ____________

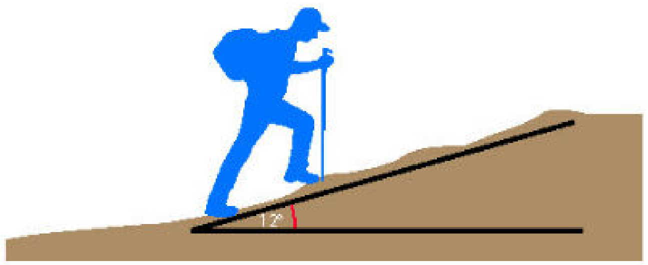


Figura 24.1 Inclinación de una montaña

  - b) Escriban en su cuaderno tanto el procedimiento que siguieron como el resultado. Al terminar la lección regresen a verificar la solucón de este problema.

Actividad 1. Sigan trabajando en parejas. Necesitarán transportador, regla graduada y lápices de colores. Recuerden que a veces los instrumentos de medición no son muy precisos y los valores obtenidos son aproximados. Cuando efectúen operaciones y obtengan números con varios decimales, redondeen a una cifra decimal para las longitudes y los ángulos.

Problema. En la figura 24.2, se muestran diferentes triángulos. Midan todos los ángulos de cada uno y escríbanlos donde corresponde. Observen el ejemplo.

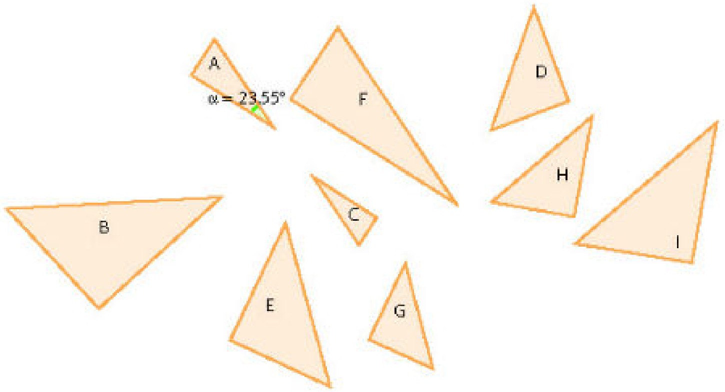


Figura 24.2 Diferentes triángulos

a) Utilicen lápices de colores diferentes y encierren en un círculo del mismo color los triángulos que sean semejantes entre sí. Expliquen por qué son semejantes. ____________

b) Marquen los catetos con color verde y las hipotenusas con rojo. Midan los catetos y la hipotenusa de cada triángulo y escriban las medidas donde corresponde.

c) Para cada grupo de triángulos semejantes elijan el ángulo de menor medida (por ejemplo, en el caso del triángulo *A* y sus triángulos semejantes el ángulo menor es $\alpha = 23.6°$). Llamen $coA\alpha$ al cateto opuesto a ese ángulo; realicen algo semejante con los catetos opuestos a los ángulos menores en cada triángulo, es decir, el cateto opuesto al ángulo menor se llama $coB\alpha$, $coC\alpha$, etcétera, de acuerdo con la letra que corresponde a cada triángulo.

d) Llamen a cada hipotenusa *Ha*, *Hb*, *Hc*, etcétera, donde las letras minúsculas corresponden al nombre de cada triángulo. Calculen los cocientes de cada triángulo.
$\frac{coA\alpha}{Ha}$, $\frac{coB\alpha}{Hb}$, $\frac{coC\alpha}{Hc}$, etcétera.

e) ¿Qué observan en los cocientes que obtuvieron en el inciso *d*? ____________

f) ¿Qué relación existe entre los cocientes de triángulos semejantes? ____________

g) Hagan lo mismo que en los incisos *c* y *d* usando los catetos opuestos al ángulo agudo mayor, llámenlos *AM*, *BM*, *CM* y así sucesivamente, y calculen los cocientes:
$\frac{AM}{Ha}$, $\frac{BM}{Hb}$, $\frac{CM}{Hc}$, etcétera.

h) Expliquen lo que observaron y verifiquen si existe una relación entre los cocientes correspondientes y los triángulos semejantes. ____________

i) Completen el enunciado del recuadro "Relación entre los ángulos agudos de triángulos semejantes" con lo que observaron en la actividad.

Relación entre los ángulos agudos de triángulos semejantes

Si dos triángulos rectángulos son semejantes, entonces los ángulos agudos del primer triángulo α y β son iguales a los dos ángulos agudos en el segundo α' y β'. Si $co\alpha$ es el cateto opuesto a α, *H* es la hipotenusa del primer triángulo y *H'* la del segundo, entonces completen la siguiente igualdad:

$$\frac{co\alpha}{H} = \frac{\square}{\square} \quad \text{y} \quad \frac{co\beta}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

Reúnanse con otra pareja y comparen sus resultados. Si hay diferencias intenten encontrar cuál es la respuesta correcta. Preparen una presentación de sus resultados para exponerlos en plenaria y con todo el grupo corrijan los posibles errores.

Actividad 2. En equipos de tres alumnos hagan lo que se pide.

Problema 1. Dibujen en su cuaderno un triángulo rectángulo donde uno de sus ángulos agudos mida 20°. Antes de hacer el dibujo, escriban la medida del otro ángulo agudo: ____________

Dibujen un segundo triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual a 20° más grande o más chico que el primer triángulo que dibujaron.

a) Midan el cateto opuesto (co) al ángulo de 20° para cada uno de los dos triángulos y su hipotenusa (*H*). Obtengan los cocientes $\frac{co}{H}$ para cada triángulo. ¿Cómo son entre sí estos cocientes: iguales, distintos o equivalentes? Justifiquen su respuesta.

____

____

Problema 2. Regresen al "Problema de investigación" y resuélvanlo usando los resultados de la actividad 1. ¿Obtuvieron la misma respuesta? Si la respuesta es distinta corríjanla.

a) Isabel y Roberto explicaron que, después de desarrollar la actividad 1, dibujaron en su cuaderno un segmento y en un extremo construyeron un ángulo rectángulo y en el otro un ángulo de 12°, después completaron el triángulo. Dibujen en el recuadro un triángulo rectángulo con un ángulo de 12°, como Isabel y Roberto, y completen el procedimiento para resolver el "Problema de investigación".

Si resolvieron el "Problema de investigación" pasen a la Retroalimentación. En caso contrario, pasen al inciso *b*.

b) Roberto dice que en el cuaderno de Isabel había un dibujo como el que se muestra en la figura 24.3. ¿Cuál es el método de Roberto e Isabel? Escríbanlo en su cuaderno.

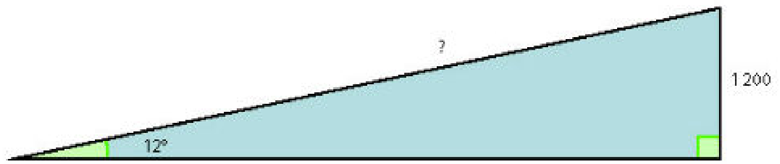


Figura 24.3 Triángulo rectángulo

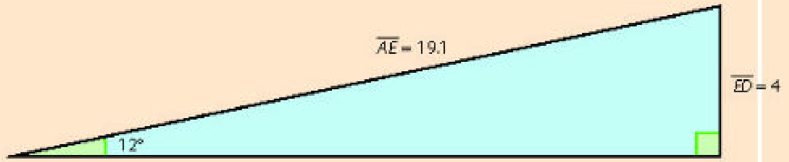
Elijan a un equipo para que exponga ante el grupo el proceso de solución y el resultado de alguno de estos problemas. Pidan a su maestro que coordine la exposición y aclare las dudas que puedan surgir.

Problemas

De manera individual resuelve lo siguiente.

1. La tabla 24.1 contiene varios enunciados sobre las relaciones entre los lados y los ángulos en triángulos rectángulos. Indica con una ✓ si el enunciado es verdadero o falso.

Tabla 24.1 Enunciados sobre las relaciones entre lados y ángulos en triángulos rectángulos

Enunciado	V	F
• Si dos triángulos rectángulos tienen sus ángulos agudos iguales, entonces son semejantes.		
• En dos triángulos semejantes los cocientes respectivos de la medida del cateto opuesto al ángulo agudo menor entre la medida de la hipotenusa son iguales.		
• En el triángulo de la figura 24.4, trazado con el software GeoGebra, el cociente del cateto opuesto al ángulo de 12° entre la hipotenusa es $\frac{4}{19.1}$, lo cual es aproximadamente igual a 0.21.  Figura 24.4 Triángulo rectángulo		
• En el triángulo de la figura 24.3, el cociente $\frac{1\,200}{?}$ debe ser aproximadamente igual a 0.21.		
• En el triángulo de la figura 24.3, la hipotenusa mide 1 200 × 0.21.		
• En el triángulo de la figura 24.3, la hipotenusa mide 1 200 ÷ 0.21.		
• En el triángulo de la figura 24.3, la hipotenusa mide 0.21 ÷ 1 200.		
• No se puede saber cuánto mide la hipotenusa del triángulo de la figura 24.3.		

2. Con base en las actividades, completa lo que falta en el recuadro "Propiedades de los triángulos rectángulos semejantes".

Propiedades de los triángulos rectángulos semejantes

Si dos o más triángulos rectángulos tienen ángulos agudos iguales, $\alpha = \alpha'$, entonces los triángulos son semejantes y también las razones entre sus lados correspondientes son: ____________________

En los triángulos rectángulos, los lados que forman el ángulo recto se llaman ____________________

Al elegir uno de los ángulos agudos de un triángulo, el lado opuesto se llama ____________________ y se denota por co.

El cociente que se obtiene al dividir la medida del cateto opuesto a α entre la hipotenusa en el primer triángulo, $\frac{co}{Hip}$, es ____________________ al cociente de dividir el cateto opuesto a α' entre la hipotenusa en el segundo. Lo mismo sucede si en lugar del cateto opuesto se toma el cateto adyacente de cada triángulo, los cocientes o razones $\frac{ca}{Hip}$ son ____________________ entre sí.

Como esto sucede para todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo igual a α, sucede que las longitudes de los catetos y las hipotenusas de triángulos rectángulos (uno de cuyos ángulos agudos es α), aunque no sean iguales, siempre varían de forma que las razones $\frac{co}{Hip}$ son iguales y las razones $\frac{ca}{Hip}$ también. No importan las longitudes de los lados, sólo el ángulo.

Estas razones se conocen como *razones trigonométricas*; como sólo dependen de que el triángulo sea rectángulo y del ángulo α, se les llama seno de α (denotado por sen (α)) y coseno de α (denotado por cos (α)), respectivamente. Así, en todo triángulo rectángulo si α es uno de sus ángulos agudos, se tiene que: sen $(\alpha) = \frac{co}{Hip}$ y cos $(\alpha) = \frac{ca}{Hip}$.

Al finalizar, en un panel grupal revisen sus respuestas y con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Uso de las TIC

- En parejas, copien la figura 24.5 en el software GeoGebra, de modo que al arrastrar el punto *B* el triángulo no se deforme, es decir, que no cambien las medidas de los ángulos β y γ.

Figura 24.5

Triángulo rectángulo con un ángulo de 30°

a) Usen la herramienta "Medir distancias" para medir $\overline{CF}$ y $\overline{BC}$; muevan B y deténganse en algún momento, anoten las medidas de $\overline{BC}$ y $\overline{CF}$ y también el cociente $\frac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$. Repitan esto diez veces y realicen en su cuaderno una tabla como la siguiente.

Triángulo	$\overline{BC}$	$\overline{CF}$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$
1			
2			
3			
....			

Escriban un mensaje a otra pareja en el cual le expliquen cómo le hicieron para trazar el triángulo de manera que se pueda mover C sin que se deformen los ángulos β y γ. Después explíquenles lo que han observado a partir de la tabla y por qué sucede esto.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. Sin emplear instrumentos de medición, obtén las medidas que faltan de los ángulos y los lados en los triángulos rectángulos de la figura 24.6; sólo usa las medidas que se muestran. Utiliza las propiedades de los triángulos rectángulos semejantes.

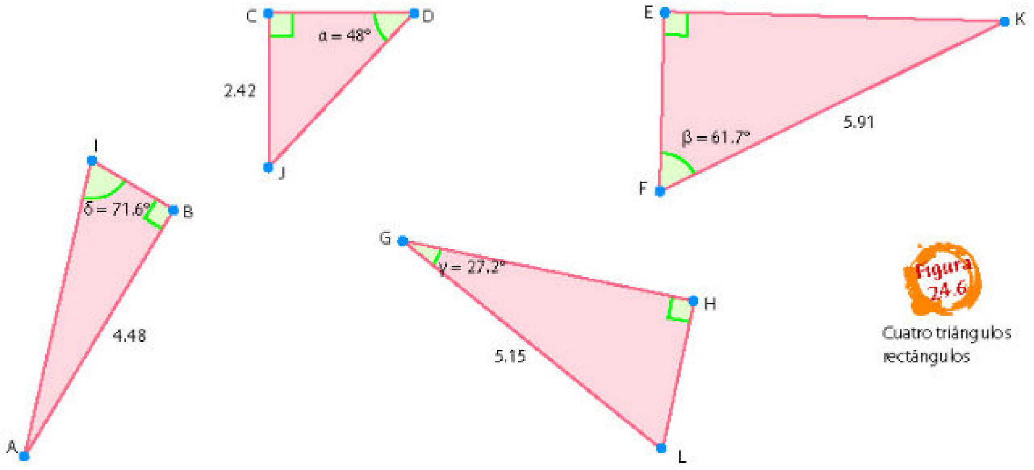


Figura 24.6

Cuatro triángulos rectángulos

2. Para clavar un clavo en la pared, Juan coloca una escalera que mide 3.3 m formando un ángulo de 42° con el piso. ¿A qué altura quedará apoyada la escalera? Juan tiene la misma estatura que tú, imagina que él no mueve la escalera. ¿A qué altura máxima podrá clavar el clavo? SUGERENCIA: Dibuja la situación del problema.

3. Cuando los rayos del sol forman un ángulo de incidencia con la Tierra de 35°, un árbol proyecta una sombra de 11 m. ¿Cuál es la altura del árbol? ______

Reúnete con tres compañeros para que comparen sus procedimientos y resultados; traten de llegar a acuerdos. Cada uno escriba en limpio las soluciones correctas con los métodos que les queden más claros y comparen sus métodos con los de otro equipo. Si surgen dudas, discútanlo con su maestro.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Trigonometría **Razón trigonométrica** **Cateto opuesto a un ángulo**

Lección 25 Razones trigonométricas

El alumno aprenderá a: Explicitar y usar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Problema de investigación

En parejas, resuelvan el siguiente problema.[1]

- Dos barcos enemigos se encuentran en alta mar, como se muestra en la figura 25.1. El primer barco, comandado por el príncipe-pirata Sandokán, se localiza en el punto *X*; el segundo, bajo las órdenes del capitán James Brooke, se localiza en el punto *Y*. El barco de Sandokán avanza hacia *Z*, en dirección perpendicular a $\overline{XY}$.
  - a) Si la velocidad del barco de Brooke es el doble que la velocidad del barco de Sandokán, ¿qué dirección deberá tomar el primero para interceptar al segundo?

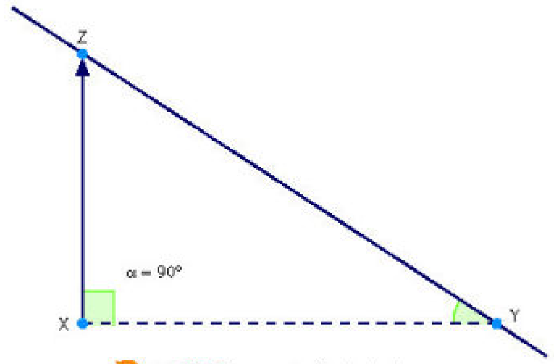


Figura 25.1 Representación de dos barcos

  - b) Si las dos naves avanzan en línea recta hacia *Z*, que es el punto en el cual se enfrentarán, ¿cuánto mide el ángulo *XYZ*? ______

Comenten el problema y resuélvanlo con lo que han aprendido en las dos lecciones anteriores. Escriban las ideas que se les ocurran para resolver el problema; sigan con la lección y al concluir regresen a revisar este problema.

Actividad 1. En equipos de tres alumnos, lleven a cabo la siguiente actividad; necesitan calculadora, regla y transportador.

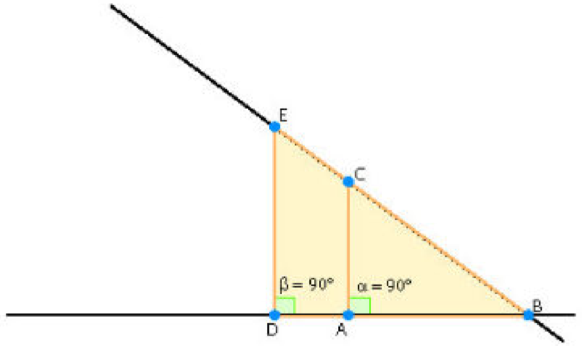
Problema. En la figura 25.2, se muestran dos triángulos semejantes: sobre el triángulo *ABC* se trazó el triángulo *DBE*.

[1] Adaptación de Héctor García Sánchez, "II Problemas de geometría", en *INTERMAT*, Sección movimiento de vehículos, p. 29, disponible en: http://intermat.fciencias.unam.mx/hector/textoproblemasg.pdf (Consulta: 5 de junio de 2013.)

a) Sobre los triángulos de la figura 25.2 tracen cuatro triángulos que sean semejantes entre sí.

Figura 25.2

Triángulos semejantes *ABC* y *DBE*



b) Midan los lados de cada triángulo y completen la tabla 25.1. Pueden utilizar la calculadora para los cocientes y redondear el resultado a dos cifras decimales. Midan con el transportador los ángulos agudos.

Tabla 25.1 Medidas de los lados y un ángulo agudo de los triángulos rectángulos semejantes

Triángulo	Ángulo	Cateto adyacente (CA)	Cateto opuesto (CO)	Hipotenusa (Hip)	Seno $\frac{CO}{Hip}$	Coseno $\frac{CA}{Hip}$	Tangente $\frac{CO}{CA}$
ABC	∡*ABC* =	$\overline{AB}$ =	$\overline{CA}$ =				
DBE	∡*DBE* =	$\overline{DB}$ =	$\overline{ED}$ =				

c) ¿Qué observan en la medida de los ángulos de la segunda columna? ______

d) Escriban el ∡*ABC* en las siguientes funciones: sen (______), cos (______) y tan (______). Con una calculadora obtengan los valores de cada una de estas razones y comparen el resultado con lo que escribieron en las últimas tres columnas de la tabla 25.1.

e) Consideren el otro ángulo agudo de cada triángulo. Por ejemplo, para el primer triángulo es ∡*BCA*, para el segundo triángulo es ∡*BED* y así sucesivamente. Escriban qué segmento es el cateto opuesto de cada ángulo y qué segmento es el cateto adyacente de cada ángulo. Completen la tabla 25.2.

Tabla 25.2 Medidas de los lados y el otro ángulo agudo de triángulos rectángulos semejantes

Triángulo	Ángulo	Cateto opuesto (CO)	Cateto adyacente (CA)	Hipotenusa (Hip)	Seno $\frac{CO}{Hip}$	Coseno $\frac{CA}{Hip}$	Tangente $\frac{CO}{CA}$
ABC	∡*BCA* =	$\overline{AB}$ =	$\overline{CA}$ =	$\overline{BC}$ =			
DBE	∡*BED* =	$\overline{DB}$ =	$\overline{ED}$ =	$\overline{DE}$ =			

Repitan el procedimiento del inciso *d* para el ángulo ∡*BCA*. Comparen las tablas 25.1 y 25.2. ¿Qué observan? ______

Uso de las TIC

En parejas, hagan lo siguiente. Necesitarán una calculadora científica.

1. Antes de llevar a cabo los cálculos verifiquen que el modo de trabajo en su calculadora esté en grados, lo que se indica con "deg" (*degree*, en inglés).
   a) tan 29° = ______ d) tan 0° = ______
   b) sen 29° = ______ e) sen 0° = ______
   c) cos 29° = ______ f) cos 0° = ______
2. Obtengan la tangente de cada ángulo de la tabla 25.1 y comparen los resultados con los cocientes de la última columna.
3. Inserten el resultado obtenido en cada inciso del punto 1 y apliquen la función representada de manera inversa. Por ejemplo, para el inciso *a* utilicen la tecla *tan*$^{-1}$. En algunas calculadoras está arriba de la tecla *tan*, y se emplea la tecla *inv* o *shift* para poder utilizarlas. ¿Qué obtienen? ¿Qué observan? ______
4. Escriban un mensaje a otra pareja, en el que le expliquen para qué sirve cada una de las teclas *tan*$^{-1}$, *sen*$^{-1}$ o *cos*$^{-1}$.
5. ¿Pueden aplicar lo visto en los puntos anteriores en el "Problema de investigación"? ______. Justifiquen su respuesta. ______

Ángulos complementarios

Dos ángulos que suman 90° se llaman **complementarios.**

Actividad 2. En equipos, hagan lo que se pide.

Problema 1. Para cada ángulo de la tabla 25.3 encuentren su ángulo complementario con base en la definición del recuadro "Ángulos complementarios".

Tabla 25.3 Ángulos complementarios	
Ángulo original	**Ángulo complementario**
45°	
30°	
60°	
52°	
26°	

a) Añadan dos columnas a la tabla 25.3 y en los encabezados escriban "Seno del ángulo original" y "Coseno de su complementario". Utilicen la calculadora y completen las columnas que agregaron. ¿Qué observan en los datos obtenidos? ____

b) Utilicen una calculadora para experimentar con otros 20 valores diferentes para los ángulos. Obtengan su complementario y comparen el seno de uno con el coseno de su complemento.

c) En el siguiente recuadro dibujen triángulos rectángulos con los ángulos agudos de la tabla 25.3.

d) Con base en los triángulos que dibujaron expliquen por qué se obtienen los resultados observados en el inciso *a*. ____

Problema 2. A Fernando se le descompuso la tecla para obtener el coseno de su calculadora científica y tiene que resolver el siguiente problema que dejaron de tarea: "Con base en la función coseno y los datos que se muestran en la figura 25.3, calcula el valor de la hipotenusa $\overline{CA}$ del triángulo *ABC*. Explica el procedimiento que utilizaste y calcula el valor del cos α".

Figura 25.3

Triángulo rectángulo

a) Expliquen lo que debe hacer Fernando para resolver el problema usando su calculadora descompuesta. Luego escríbanlo. ____

b) Resuelvan el problema sin usar la tecla de coseno. Escriban los valores que calcularon:

cos α = __________ *h* = __________

Problema 3. Construyan una tabla con cinco columnas; en la primera columna de la izquierda el encabezado es "Ángulo" y anoten el valor de los ángulos con los que trabajaron en el problema 1.

a) Los encabezados de las dos siguientes columnas son "Seno" y "Coseno". Escriban el valor de las fracciones seno y coseno para cada unos de los ángulos de la primera columna.

b) En una cuarta columna escriban el valor de la tangente de cada ángulo; utilicen una calculadora.

c) En una última columna escriban el resultado que se obtiene del cociente $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

d) Comparen los resultados de las dos últimas columnas.

e) Escriban un mensaje a otro equipo diciéndole lo que observan. ____

En grupo, revisen las estrategias que utilizaron para resolver los problemas. Con ayuda de su maestro repasen y reflexionen sobre los conocimientos que han utilizado en esta actividad.

En el siguiente recuadro se muestra una conclusión de lo anterior.

Relación entre seno, coseno y tangente

El seno de un ángulo α es igual al coseno de su complementario, es decir:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos(90 - \alpha).$$

La tangente de un ángulo es igual al cociente del seno entre su coseno, esto es:

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Repasa lo aprendido

De manera individual, resuelve los problemas y realiza el procedimiento en tu cuaderno.

1. Un cuervo se encuentra en el suelo a unos metros de un árbol. De repente ve algo para comer en el tronco del árbol a 8 m de donde está y vuela formando un ángulo de 20° en relación con el suelo (la horizontal) para alcanzar el alimento. ¿A qué distancia vuela el cuervo? Sugerencia: Representa el problema mediante un dibujo.
2. Un golfista se halla en el punto *A*, a 150 m del hoyo al que debe llegar (punto *B*), y hace un tiro a ras de suelo. La bola rueda por el pasto en línea recta formando un ángulo de 14° con la línea que forman el golfista y el hoyo. La bola se detiene en el punto *C* a una distancia *x* del hoyo. Si *CBA* es un ángulo recto, ¿cuánto mide *x*? Sugerencia: Haz un dibujo que represente el problema.
3. En la figura 25.4, se muestra un triángulo rectángulo. Encuentra las medidas faltantes del ángulo y el lado.

   Ángulo α = ______ Lado $\overline{B'A'}$ = ______

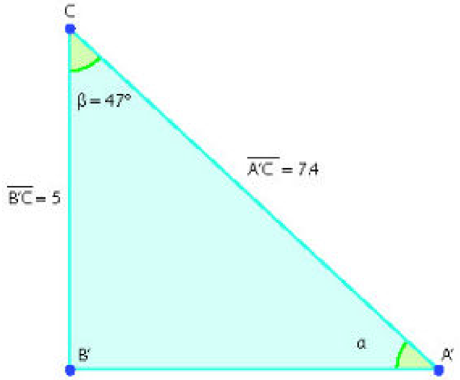


Figura 25.4
Triángulo rectángulo

4. Completa los datos que faltan en la tabla 24.4.

Tabla 24.4 Funciones trigonométricas

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
28°			
	0.755		
		0.81	
			1.615
57°			
	0.34		
		0.1	
			0.82

En grupo revisen las respuestas y las estrategias que utilizaron para resolver los problemas. Copien en el pizarrón la tabla 24.4 y pasen a escribir los resultados. Con ayuda de su maestro aclaren las dudas.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Seno **Coseno** **Tangente** **Funciones trigonométricas inversas**

Lección 26 Razón de cambio y pendiente de una recta

El alumno aprenderá a:
Calcular y analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificar la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Problema de investigación

Resuelvan el siguiente problema en parejas.

- En física se tiene la siguiente ley para gases ideales de Gay-Lussac:

  El volumen de un gas se incrementa de manera proporcional a su temperatura siempre que la presión permanezca constante.

El enunciado anterior significa que cuando se incrementa la temperatura también se incrementa el volumen de manera proporcional.

a) En una práctica de laboratorio, los estudiantes registraron en una tabla el volumen de aire en intervalos de 10 °C. Iniciaron desde 20 °C hasta 90 °C, manteniendo la presión constante. En la tabla 26.1, se muestra el volumen obtenido en 20 °C y 30 °C; escriban los valores correspondientes a los incrementos de temperatura mostrados.

Tabla 26.1 Volumen de aire al incrementar la temperatura

Temperatura (°C)	20	30	40	50	60	70	80	90
Volumen (cm³)	107.3	110.9						

b) Dibujen en su cuaderno un plano cartesiano y tracen la gráfica que representa el incremento del volumen respecto a la temperatura.

Reúnanse con otra pareja y expliquen cómo encontraron los valores que faltaban. Respondan lo siguiente: ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______ ¿Cuánto aumenta el volumen por cada grado Celsius? ______

A la razón del incremento de una variable entre el incremento de otra se le llama razón de cambio. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen respecto a la temperatura? ______
¿La razón de cambio permanece constante? ______
Justifiquen su respuesta.

Tipos de incremento

Actividad 1. En equipo, lean la definición de "Incrementos de una sucesión" y después resuelvan el problema.

Incrementos de una sucesión

Los **incrementos de una sucesión** se establecen por la diferencia entre un elemento de la sucesión y su antecesor.

Los incrementos de una sucesión pueden ir aumentando, permanecer constantes o ir disminuyendo. Cuando los incrementos tienen un valor constante, se dice que la sucesión representa una función lineal: la función $f(n) = z$.

Problema. En las tablas 26.2, 26.3 y 26.4 se muestran tres sucesiones.

Tabla 26.2 Sucesión I

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u	4	5	7	10	14	19	25	32

Tabla 26.3 Sucesión II

n	1	2	3	4	5	6	7	8
v	4	9	12	15	18	21	24	27

Tabla 26.4 Sucesión III

n	1	2	3	4	5	6	7	8
w	4	11	17	22	26	29	31	32

a) Propongan una sucesión de números en la que los incrementos sean negativos y completen la tabla 26.5.

Tabla 26.5 Sucesión IV

n	1	2	3	4	5	6	7	8
y								

b) Calculen y escriban el incremento de cada sucesión.

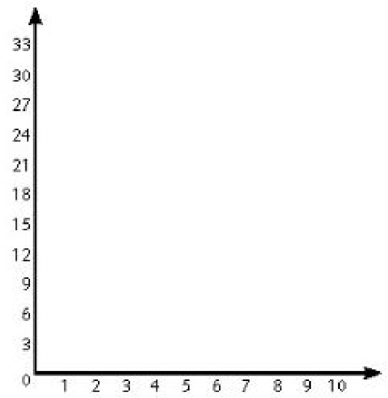
i) Incremento de la sucesión I: ____________

ii) Incremento de la sucesión II: ____________

iii) Incremento de la sucesión III: ____________

iv) Incremento de la sucesión IV: ____________

c) Dibujen en su cuaderno cuatro planos cartesianos como el que se muestra a continuación y grafiquen en cada uno los puntos (n, s), donde $s = u, v, w$ o y, de acuerdo con la tabla correspondiente.



Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Respondan las siguientes preguntas con base en lo que hicieron en la actividad. ¿La gráfica fue una línea recta o una curva? ____________ ¿Cómo es el incremento en las sucesiones representadas? ____________ ¿Tales sucesiones representaron funciones lineales? ____________ ¿Cómo es el incremento en las funciones lineales? ____________

¿Cómo es la gráfica de las funciones cuando el incremento es constante? ____________

Razón de cambio de modelos lineales

En la actividad 1 se calcularon diferentes valores en los incrementos de sucesiones distintas. Noten que los incrementos se calcularon entre dos elementos sucesivos de la sucesión. Esta idea se generaliza para cualesquiera dos valores de una función a través de la definición de razón de cambio.

Razón de cambio

En una función, la **razón de cambio** en un intervalo es la diferencia de los valores de la función en los extremos del intervalo entre la longitud del intervalo.

Actividad 2. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. Un automóvil recorre una distancia de 25 km. En la tabla 26.6, se muestra la distancia (en kilómetros) por la que pasa cada par de minutos.

Tabla 26.6 Distancia que recorre un automóvil en función del tiempo

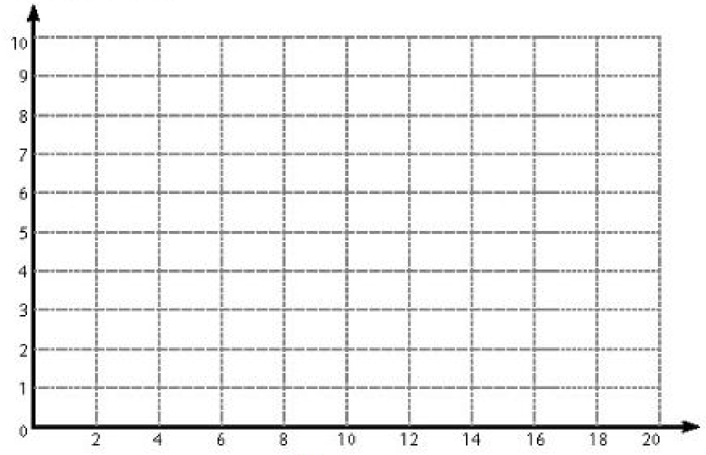
t (min)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
d (km)	2.5	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20	22.5	25

a) ¿Cómo se calcula y cuál es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo? ____________

b) Completen la tabla 26.7 con los valores de la razón de cambio. Empleen la definición que se dio en el recuadro.

Tabla 26.7 Razón de cambio								
Intervalo	[2, 4]	[4, 6]	[6, 8]	[8, 10]	[10, 14]	[14, 16]	[16, 18]	[18, 20]
Razón de cambio ($\frac{km}{min}$)								

c) Dibujen la gráfica 26.1 que represente la distancia recorrida en función del tiempo. Utilicen los datos de la tabla 26.6.



Gráfica 26.1

d) Verifiquen que la gráfica que obtuvieron sea una recta. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Establezcan la relación entre la razón de cambio y la pendiente de la recta. Elaboren un reporte y entréguenlo a su maestro.

Actividad 3. De manera individual responde lo que se pide.

Problema. Cuando un objeto se hunde en una alberca, el agua ejerce una presión sobre él. Entre más profundo llegue el objeto, la presión es mayor. En la tabla 26.8, se muestra la presión ejercida por el agua sobre un objeto a diferentes profundidades.

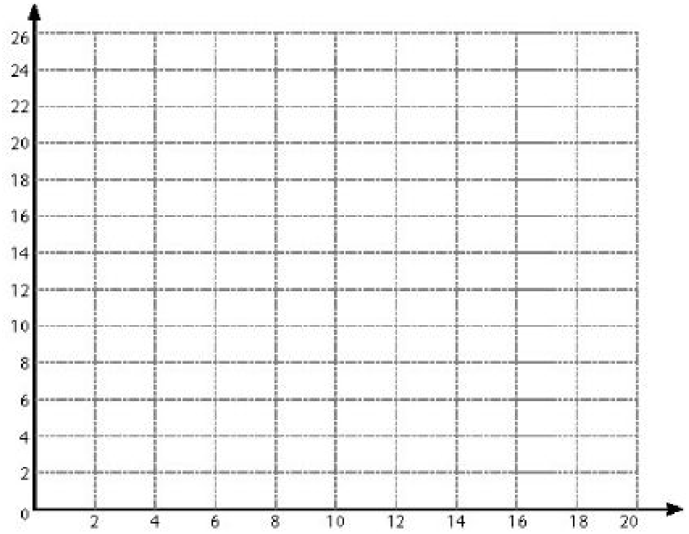
Tabla 26.8 Incremento de la presión ejercida por el agua sobre un objeto							
Profundidad en el agua (cm)	0	2.5	5	7.5	10	12.5	15
Presión ($\frac{N}{cm^2}$)	18.4	19.1	19.8	20.5	21.2	21.9	22.6

a) ¿Cuál es la razón de cambio de la presión respecto a la profundidad en los intervalos [0, 2.5], [2.5, 5.0], así hasta [12.5, 15]?

b) Completa la tabla 26.9 con los valores de la razón de cambio.

Tabla 26.9 Razón de cambio						
Intervalo (cm)	[0, 2.5]	[2.5, 5]	[5, 7.5]	[7.5, 10]	[10, 12.5]	[12.5 ,15]
Razón de cambio						

c) Dibuja la gráfica 26.2 en la que se represente la presión que ejerce el agua en función de la profundidad a la que se encuentra el objeto.



Gráfica 26.2

d) Verifica que la gráfica que obtuviste sea una recta. Calcula la pendiente de la recta. (Ve página 178.)

En equipos de tres alumnos comparen sus respuestas. Comenten la proposición: "La razón de cambio de una función lineal es constante". Con la guía de su maestro lleguen a un acuerdo sobre si dicha relación es la relación fundamental.

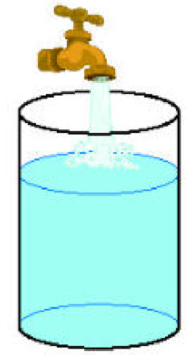
Razón de cambio y pendiente

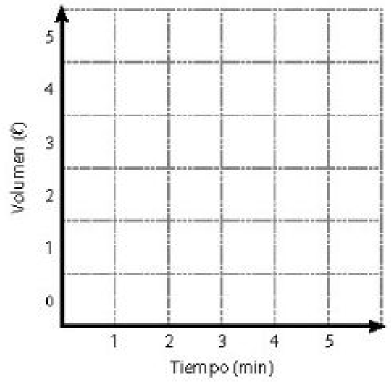
Actividad 4. En equipos, hagan lo que se pide.

Problema. En la figura 26.1, se muestra una llave que llena un tinaco a razón de $1\frac{1}{2}$ litros por minuto.

a) Dibujen la gráfica 26.3 en la que se represente el llenado de dicho tinaco.

Figura 26.1
Llenado de un tinaco





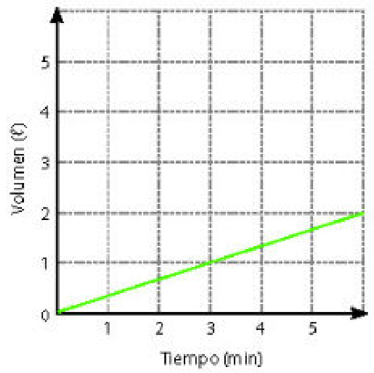
Gráfica 26.3

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta que dibujaron? ______

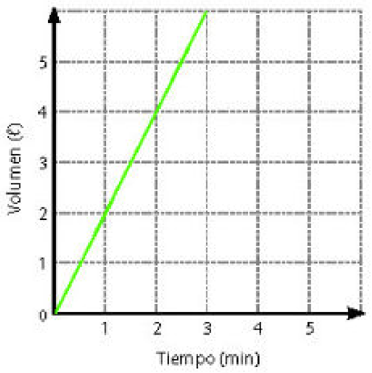
c) ¿Qué relación hay entre la razón de cambio y la pendiente de la recta que representa el llenado del tinaco? ______

d) Las gráficas 26.4, 26.5 y 26.6 representan el llenado (o vaciado) de tres llaves.

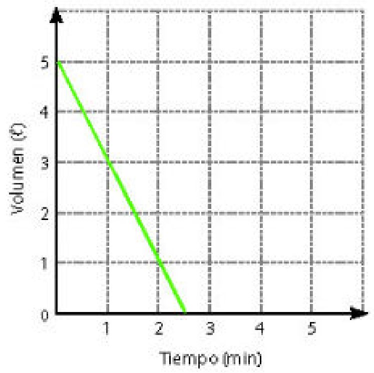
i) Para cada gráfica, ¿cuál es la razón de cambio del llenado o vaciado? ______



Gráfica 26.4



Gráfica 26.5



Gráfica 26.6

ii) Determinen la pendiente de cada recta. ______

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten por qué es necesario calcular la pendiente y la razón de cambio para modelar situaciones. Escriban en qué otros fenómenos se encuentra el concepto de razón de cambio. ______

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. En la gráfica 26.7, se muestran dos rectas que representan el movimiento de los objetos A y B.

Con base en la gráfica 26.7 responde:

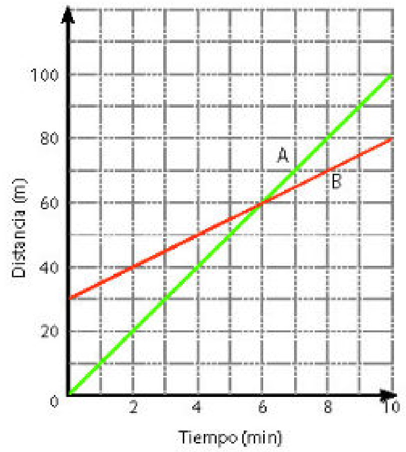
a) ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia (es decir, la velocidad) de cada objeto?

Razón de cambio del objeto A = ______

Razón de cambio del objeto B = ______

b) Calcula la pendiente de cada una de las rectas que modelan la situación. ______

c) ¿Qué relación hay entre la razón de cambio y la pendiente de la recta en cada caso? ______



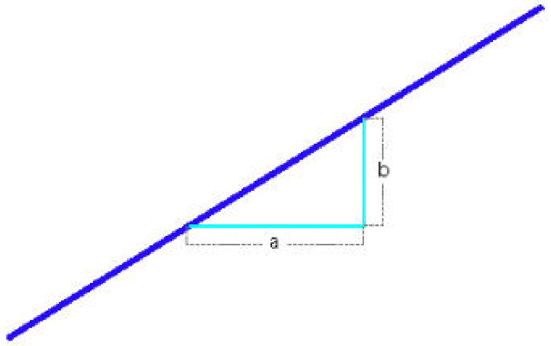
Gráfica 26.7 Representación del movimiento de dos objetos

2. En la gráfica de una recta se tiene lo siguiente: "La pendiente es el cociente de la cantidad que sube entre la cantidad que avanza".

a) Con base en la notación de la recta que se representa en la figura 26.2 escribe la expresión de la pendiente (m).

m = ______

Figura 26.2
Representación de una recta



En parejas comparen sus respuestas; si surgen dudas consulten lo que vieron en la lección. En caso de que las respuestas no coincidan, consulten a su maestro.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Incremento en una sucesión **Razón de cambio** **Pendiente de una recta**

Lección 27 Medidas de dispersión

El alumno aprenderá a:
Medir la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizar las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

Problema de investigación

En parejas, resuelvan el siguiente problema.

◆ Emilio encontró en la feria dos juegos con premios en los que le interesa participar, sin embargo, el dinero que tiene sólo le alcanza para uno. Para saber por cuál decidirse toma nota de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego, anota y ordena los resultados como se muestra en la tabla 27.1. Las pérdidas se representan con números negativos (–) y los premios obtenidos con cifras positivas (+).

Tabla 27.1 Muestra de 10 personas que participaron en dos juegos

Juego 1	–25	–21	–4	–4	–2	11	13	15	16	50
Juego 2	–132	–120	–81	–24	–21	18	60	96	120	133

a) Calculen la media aritmética o promedio de cada juego (usen su calculadora).

b) Comparen las medias de cada juego. ¿Qué le conviene elegir a Emilio: uno de los dos juegos o ambos? ____________ ¿Por qué? ____________

c) ¿Qué datos tienen mayor dispersión: los del juego 1 o los del 2? ____________

d) ¿En cuál de los juegos se tiene el riesgo de perder más a la vez que la oportunidad de ganar más? ____________ Expliquen por qué ____________

e) Si Emilio prefiere no arriesgar mucho, ¿qué juego debe elegir? ____________. Justifiquen su respuesta. ____________

f) Si, en cambio, desea arriesgar mucho, ¿cuál debe elegir? ____________. Justifiquen su respuesta. ____________

Reúnanse con otra pareja, comparen sus respuestas y respondan qué significa, en términos de pérdida-ganancia, que un juego tenga más dispersión que el otro.

La dispersión es importante

Actividad 1. En equipos, lean lo siguiente y realicen lo que se pide.

Problema. Lorena padece una enfermedad que es controlable con medicamentos y puede elegir entre dos tratamientos. Se han registrado diferentes reacciones a los medicamentos en distintos pacientes. En algunos se ha observado el resultado previsto, pero en otros casos los resultados han sido de mayor o menor beneficio que el esperado.

En la tabla 27.2, se muestran los años que han vivido varios pacientes con alguno de los dos tratamientos terapeúticos; cada dato de la tabla corresponde a un paciente.

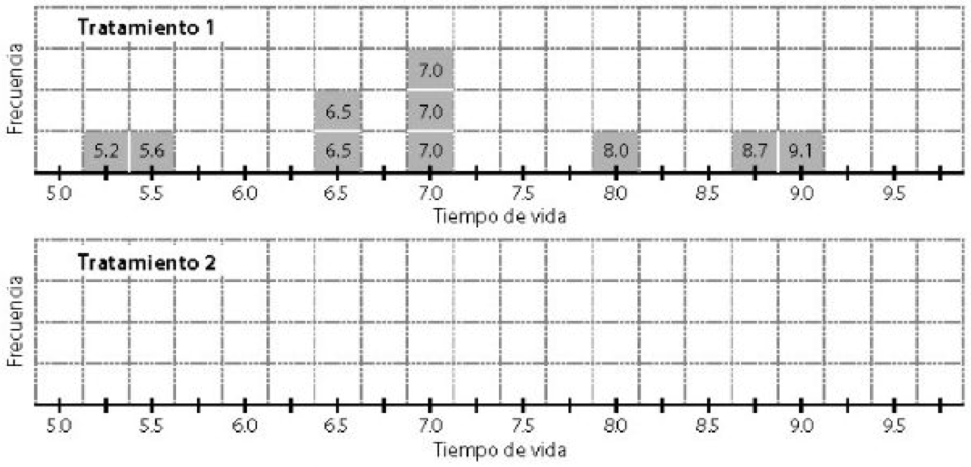
Tabla 27.2 Tiempo de vida, en años, con uno de dos tratamientos terapeúticos

Tratamiento 1	5.2	5.6	6.5	6.5	7.0	7.0	7.0	8.0	8.7	9.1
Tratamiento 2	6.5	6.5	6.7	7.0	7.0	7.0	7.2	7.5	7.5	8.2

a) Calcula la media aritmética de cada tratamiento (llámalo *esperanza de vida* del tratamiento).

b) Con base en la esperanza de vida, ¿se puede decir que un tratamiento es mejor que otro? ____________. Expliquen por qué. ____________

c) En la gráfica 27.1, se muestra un histograma con los datos del tratamiento 1. Construyan el histograma correspondiente a los datos del tratamiento 2.



Gráfica 27.1 Frecuencia de tiempo de vida después del tratamiento

d) ¿Cuál de los tratamientos tiene mayor dispersión? ____________

e) Si al paciente no le gusta correr riesgos, ¿qué tratamiento deberá elegir? ____________

f) Si el paciente está dispuesto a arriesgarse, ¿qué tratamiento elegirá? ____________

Medidas de la dispersión

Es importante interpretar adecuadamente la dispersión en situaciones de riesgo (pérdida-ganancia, esperanza de vida) para tomar la decisión más adecuada. En los datos anteriores, la dispersión se ve a simple vista. Sin embargo, conviene buscar medidas derivadas de los datos que sean indicadoras de la dispersión.

Actividad 2. En parejas, respondan lo que se pide.

Problema. En la tabla 27.1, se observan los datos de una muestra para la elección de dos juegos. Con base en los datos respondan.

a) Escriban la media aritmética de cada juego.

i) Media del juego 1 = ____________________

ii) Media del juego 2 = ____________________

b) Para cada juego calculen la diferencia entre el dato mayor y el dato menor (rango).

i) Rango del juego 1 = ____________________

ii) Rango del juego 2 = ____________________

Comparen sus resultados con los de otra pareja. Lleguen a un acuerdo sobre cuáles son correctos y comenten las siguientes preguntas:

- ¿Cuándo un conjunto de datos está evidentemente más disperso que otro conjunto de datos? Den un ejemplo ____________________
- ¿Cuando un conjunto de datos está evidentemente más disperso tiene mayor rango? ____________________
- Si se tuviera un tercer juego con la misma media, pero con un rango más grande, ¿significa que el tercer juego es más arriesgado? ____________ Expliquen por qué. ____________________

Situaciones de medida

En las actividades cotidianas, ya sea de índole profesional o científica, se miden objetos (el ancho de una ventana, la resistencia de un puente, el tamaño de microorganismos, etcétera). Las medidas siempre están sujetas a errores, algunas veces los valores son mayores o menores. Si se mide un objeto varias veces generalmente se obtienen valores diferentes. ¿Qué medida se toma como la más precisa? En estas situaciones, ¿qué significa la dispersión de los valores de diferentes medidas de un objeto? Piensa en estas preguntas mientras realizas la actividad 3.

Actividad 3. En equipos de tres alumnos, resuelvan el siguiente problema.

Problema. Los científicos siempre se han interesado en la determinación de la distancia de la Tierra al Sol. Los estudiantes de una maestría en astronomía tenían que decidir entre dos métodos para obtener mediciones de la distancia al Sol. Se dividieron en dos equipos y cada uno utilizó un método diferente. Cada equipo realizó 10 mediciones de la distancia de la Tierra al Sol de manera independiente. En la tabla 27.3, se muestran los resultados de ambos equipos.

Tabla 27.3 Mediciones de la distancia de la Tierra al Sol (millones de kilómetros)

Equipo 1	147.1	147.1	147.1	148.5	148.5	150.0	151.4	152.1	152.1	152.1
Equipo 2	147.1	148.5	148.5	149.6	149.6	149.6	150.0	150.0	151.0	152.1

a) Calculen la media aritmética para los resultados de cada uno de los equipos (usen calculadora).

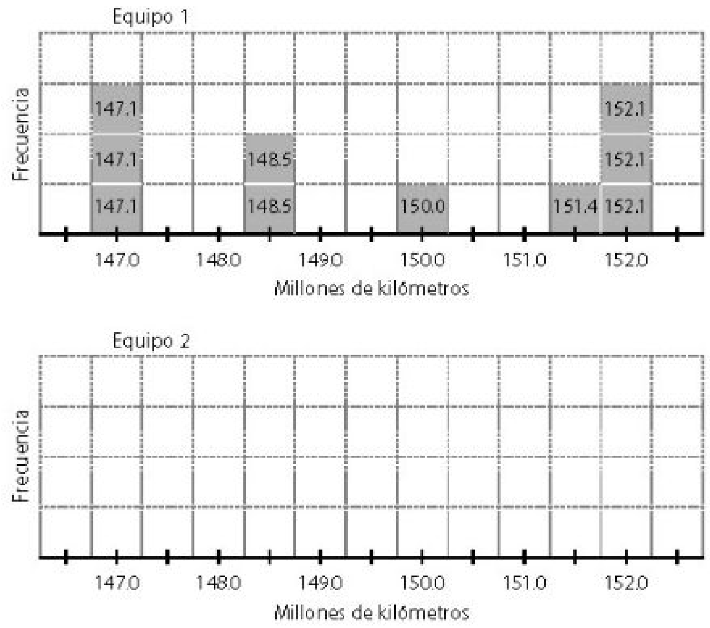
i) Media del equipo 1 = ____________________

ii) Media del equipo 2 = ____________________

b) Con base en los valores de las medias, ¿se puede decir que el método empleado por un equipo es mejor que el utilizado por el otro? ____________ Justifiquen su respuesta. ____________________

c) En la gráfica 27.2, se elaboró un histograma con los datos del equipo 1. Construyan el histograma con los datos del equipo 2.

Medidas de distancia de la Tierra al Sol



Gráfica 27.2 Mediciones de la distancia de la Tierra al Sol

d) Calculen los rangos de cada equipo.

i) Rango del equipo 1 = ____________________

ii) Rango del equipo 2 = ____________________

e) ¿Qué conjunto de datos (equipo 1 o equipo 2) tiene mayor dispersión? ¿Por qué? ____________________

f) Si la distancia de 149.6 millones de kilómetros es la mejor estimación de la distancia de la Tierra al Sol, ¿cuál de los métodos es más preciso? ____________ ¿Por qué? ____________________

Reúnanse con otro equipo e intercambien sus resultados. Lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas. Respondan las preguntas que se plantean:

- ¿El rango de los datos es un indicador de qué tan precisos son? Si tuvieran un conjunto de datos con la misma media, pero con un rango más grande, ¿estos datos son más precisos o más imprecisos? ______
- Cuando los datos tienen el mismo rango, ¿se puede decir que los datos son igualmente precisos? Utilicen los datos de la tabla 27.3 para argumentar sus respuestas.

El rango y la desviación media son medidas de dispersión

El rango es una medida de la dispersión y se define en el siguiente recuadro.

Rango

El **rango** (o recorrido) de un conjunto de datos es la distancia que separa al dato menor del dato mayor. Se calcula con la siguiente fórmula:

$$R = M - m$$

Donde R es el rango, M es el valor máximo del conjunto de datos y m es el valor mínimo.

Otro valor utilizado para medir la dispersión es la desviación media que se define en el siguiente recuadro.

Desviación media

La **desviación media** de un conjunto de datos es la media aritmética de las distancias de cada valor a la media de los datos. Por ejemplo, para cinco datos representados con x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y $\overline{X}$ la media de los cinco datos, la desviación media (Dm) es:

$$Dm = \frac{|x_1 - \overline{X}| + |x_2 - \overline{X}| + |x_3 - \overline{X}| + |x_4 - \overline{X}| + |x_5 - \overline{X}|}{5}$$

Nota: La expresión $|x|$ se llama el "valor absoluto de x". Si x es positiva o cero, el resultado es el mismo número, por ejemplo: $|5| = 5$; si x es negativo, el resultado es el número con signo positivo: $|-5| = 5$. El valor absoluto se utiliza para indicar distancias.

Problemas

De manera individual realiza lo que se pide.

Considera los datos de la tabla 27.2 (p. 205).

a) Calcula la media de cada tratamiento: $\overline{X}_{Trat\,1} =$ ______ . $\overline{X}_{Trat\,2} =$ ______ .

b) Escribe los datos de la tabla 27.2 de cada uno de los tratamientos en el primer renglón de las tablas 27.4 y 27.5 donde corresponde y calcula el valor absoluto de las diferencias de cada valor con la media.

Tabla 27.4 Datos (tratamiento 1)

x_i										
$\lvert x_i - \overline{X} \rvert$										

Tabla 27.5 Datos (tratamiento 2)

x_i										
$\lvert x_i - \overline{X} \rvert$										

c) ¿Cuál es, finalmente, la desviación media de cada tratamiento?

i) Dm del tratamiento 1 = ______

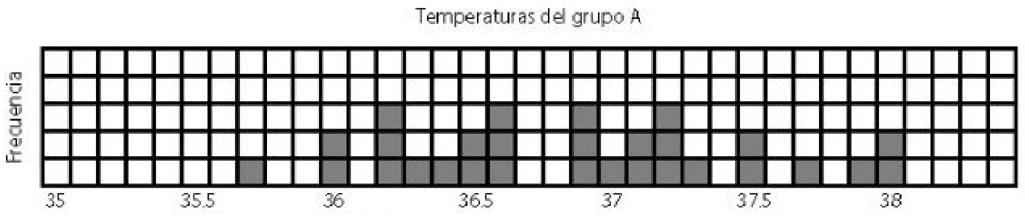
ii) Dm del tratamiento 2 = ______

Reúnanse con otro compañero y comparen sus respuestas. Comenten la información que proporciona la desviación media para determinar la dispersión. Argumenten sobre las ventajas que tiene la desviación media respecto al rango. Escriban sus conclusiones y entreguen un reporte a su maestro.

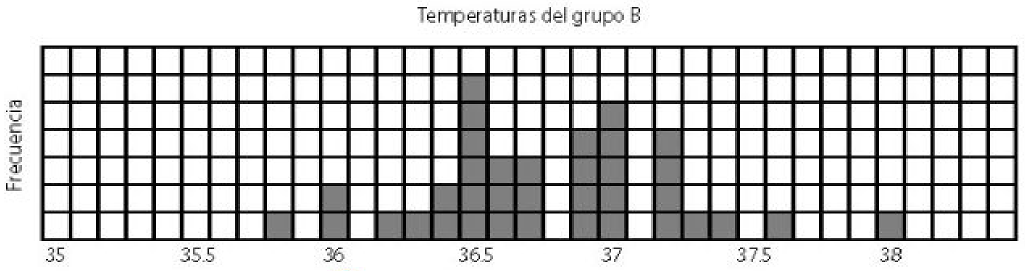
Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve en tu cuaderno los problemas que se plantean.

1. Los estudiantes de tercer año de secundaria de dos grupos (A y B) realizaron una práctica en la cual midieron la temperatura corporal de diferentes compañeros con termómetros de mercurio. Los datos que obtuvo cada grupo se muestran en los histogramas de las gráficas 27.3 y 27.4.



Gráfica 27.3 Temperaturas corporales del grupo A



Gráfica 27.4 Temperaturas corporales del grupo B

a) Con base en los histogramas de las gráficas 27.3 y 27.4, ¿en qué conjunto de datos (grupo A o B) se observa mayor dispersión? ______

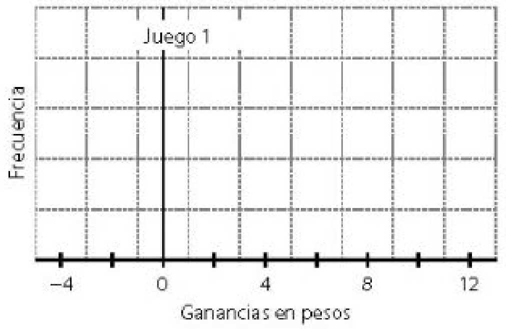
b) Calcula la desviación media para determinar qué conjunto de datos tiene mayor dispersión. ______

2. Las pérdidas-ganancias en dos juegos de apuestas son las siguientes:

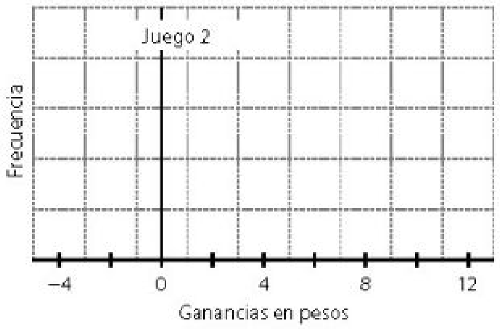
Tabla 27.6 Muestra de 10 personas que participaron en dos juegos de apuestas

Juego 1	−2	0	0	2	2	4	4	4	6	8	10	10	12	12	12	12
Juego 2	−2	0	2	4	4	6	6	6	6	8	8	8	8	10	10	12

a) Traza las gráficas 27.5 y 27.6 de la ganancia de cada uno de los juegos.



Gráfica 27.5 Juego 1



Gráfica 27.6 Juego 2

b) Calcula la media aritmética de la ganancia para cada juego.

c) En promedio, ¿se gana más en un juego que en el otro? ______

d) Con base en los datos de la tabla 27.6, ¿en qué juego se corre más riesgo? ______. ¿Por qué?

______

e) Calcula la desviación media de cada conjunto de datos. ______

Reúnete con otro compañero y contrasten sus respuestas. Analicen la importancia de saber calcular e interpretar la desviación media en situaciones de riesgo. Respondan las preguntas:

- ¿Qué ventaja tiene la desviación media respecto al rango? ______
- Si el rango de dos conjuntos de datos es igual, pero en uno de ellos es mayor la concentración de los datos alrededor de la media, ¿la desviación media será igual en ambos conjuntos de datos? ______ Argumenten su respuesta con base en las actividades que realizaron a lo largo de la lección.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Dispersión **Rango** **Desviación media**

Evaluación

Lee cada situación y elige la respuesta correcta.

Situación 1. Considera la sucesión 2, 6, 12, 20, 30,…

1. ¿Cuál es el siguiente término de la sucesión?

a) 38 b) 40 c) 42 d) 46 (a) (b) (c) (d)

2. ¿Cuál es el término que está en la posición 100?

a) 300 b) 600 c) 650 d) 750 (a) (b) (c) (d)

3. Escribe la ecuación cuadrática que define al enésimo término de la sucesión:

______

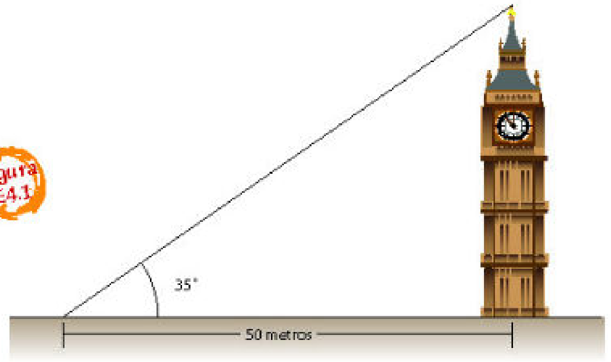
Situación 2. La expresión cuadrática $S_n = n^2 + 2n + 4$ genera una sucesión.

4. ¿Cuál es la sucesión generada?

a) 7, 12, 19, 28, 39,… b) 7, 12, 17, 23, 28,… c) 7, 9, 13, 18, 24,… d) Otra (a) (b) (c) (d)

Situación 3. Para calcular la altura de una torre se considera el ángulo de elevación del segmento que va de un punto del suelo a la punta de la torre. El punto del suelo está a 50 m del centro de la base de la torre como se muestra en la figura E4.1.

Figura E4.1



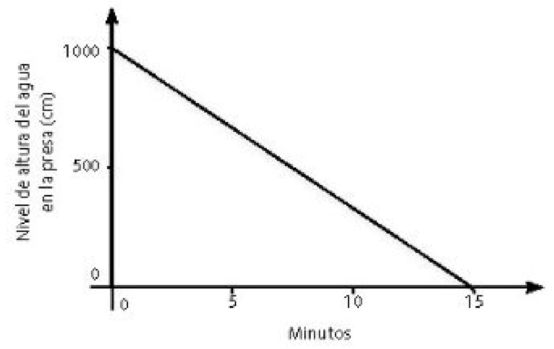
5. Considera que: sen (35°) = 0.57, cos (35°) = 0.82 y tan (35°) = 0.70. ¿Cuál es la altura de la torre?

a) 35 m b) 28.5 m c) 41 m d) Otra (a) (b) (c) (d)

6. Justifica tu respuesta. ______

______

Situación 4. La gráfica E4.1 describe la altura de una presa que tiene 1 000 cm de altura, mientras se está vaciando.



Gráfica E4.1

7. ¿Cuál es la razón de cambio de la altura del nivel del agua $\left(\frac{\text{cm}}{\text{min}}\right)$?

a) $m = 0.015$ b) $m = -0.015$ c) $m = 66\frac{2}{3}$ d) $m = -66\frac{2}{3}$

a b c d

8. Si x es el tiempo transcurrido a partir de que se comienza a vaciar la presa y y la altura del nivel del agua, la ecuación que describe el nivel de la altura del agua es:

a) $15y - 1000x = 15\,000$ c) $1000y - 15x = (1\,000)^2$

b) $15y + 1000x = 15\,000$ d) $1000y + 15x = (1\,000)^2$

a b c d

Situación 5. Un profesor de matemáticas premia al grupo que, en conjunto, obtenga las mejores calificaciones. Este año, dos grupos de 20 alumnos cada uno obtuvieron las siguientes calificaciones:

Grupo A:

8 7 6 7 6 10 10 9 9 10 7 6 6 10 10 6 10 9 10 6

Grupo B:

8 7 10 8 6 7 8 9 8 10 7 8 9 8 7 9 8 9 10 6

El profesor determina que la media (el promedio) de cada conjunto de datos es 8.1 y no puede decidir con base en el promedio qué grupo debe ser premiado.

9. Si el profesor decide dar el premio al grupo más constante y regular (es decir, con menor dispersión), ¿a cuál se lo daría?

a) Al grupo A b) Al grupo B c) Se divide entre ambos

a b c

10. Escribe la justificación de tu respuesta. ______________________________

____

Bloque 5

En la página de internet del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi) se puede consultar información para llevar a cabo investigaciones.

Un vistazo

A manera de síntesis de lo que se ha visto a lo largo del curso, se estudiarán y resolverán problemas que dan paso a las ecuaciones lineales con una incógnita, ecuaciones simultáneas y ecuaciones cuadráticas. Se continúa con el estudio de cilindros y conos, determinando las fórmulas para calcular su volumen y otras dimensiones cuando se conoce algunas de sus medidas; en este tema se combinan conceptos geométricos con algebraicos, al requerir despejar una incógnita de la fórmula del volumen. Asimismo, se estudian situaciones que pueden modelarse mediante funciones lineales o cuadráticas, dando lugar a problemas que se resuelven elaborando y analizando gráficas o por medio de ecuaciones. Se finalizará con el estudio de un tema de probabilidad en el que se determinan las condiciones que debe cumplir un juego de azar para que sea justo.

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El alumno aprenderá a:
Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formular problemas a partir de una ecuación dada.

Lección 28 Ecuaciones y problemas

Problema de investigación

En parejas, resuelvan el siguiente problema.

◆ El producto de dos números es igual a 490 y uno de los números es 10 veces el otro.

a) ¿Cuáles son estos números? ____________________

b) ¿Existe una solución única, varias soluciones o ninguna solución para este problema? ____________ Justifiquen su respuesta. ____________________

Expliquen a otra pareja el procedimiento que siguieron para encontrar el resultado. Determinen cuál es el procedimiento más práctico.

Problemas de ecuaciones lineales

Actividad 1. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. Al triple de un número réstenle la mitad del mismo número. A ese resultado súmenle 5. Esto es igual al doble del número propuesto. ¿Cuál es ese número?

a) Escriban la ecuación con la que se encuentra la solución. ____________________

b) Resuelvan el problema en el recuadro.

c) Redacten un problema parecido al del inicio de la actividad cuya solución se encuentre resolviendo la ecuación $5x - \frac{1}{3}x - 12 = 4x$. ____________________

d) Formulen un problema en el que la solución se halle resolviendo la ecuación $4x - \frac{1}{5}x + 2.4 = 7x$. El problema puede estar en un contexto diferente al numérico. Encuentren la solución. ____________________

e) En su cuaderno, formulen problemas a partir de las siguientes ecuaciones y determinen su solución.

i) $3x - 56 = \frac{1}{2}(x - 26)$

ii) $6x - 0.8 = \frac{1}{3}(x - 28.2)$

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Expliquen el método que utilizaron para formular los problemas a partir de una ecuación.

Problemas

En equipos, propongan ecuaciones con base en el enunciado del problema y resuélvanlo.

1. Lucía fue de compras y efectuó tres pagos. En la segunda compra gastó $120 más que en la primera; en la tercera, la mitad de lo que gastó en las dos primeras. En total, gastó $1 740.
   a) ¿Cuánto gastó en la primera compra? ____________________
   b) ¿Cuánto gastó en la segunda y la tercera? ____________________
2. Se agregaron 35 g de sal a un recipiente que contenía agua pura. Se obtuvo agua salada con 7% de sal. ¿Cuántos gramos de agua pura contenía el recipiente? ____________________
3. Fernando deberá pagar a Hacienda este mes $3 000 de multa, más $\frac{1}{5}$ de su ingreso. Si pagó $6 500 este mes, ¿cuál fue su ingreso?
4. Inicialmente, un meteorito estaba a 200 000 000 km de distancia de la Tierra. Ahora está viajando hacia la Tierra a una velocidad de 3 000 000 km por semana. ¿Cuántas semanas deben pasar antes de que esté a 100 000 000 km de la Tierra?

Sistemas de ecuaciones lineales

Actividad 2. En equipos, lean el problema y hagan lo que se pide.

Problema. Laura y Fanny hacen cuentas del dinero que tiene cada una.

—Si me dieras $50 tendría la misma cantidad del dinero que te quede— le dice Laura a su amiga.

—Y si tú me dieras $50 yo tendría el doble de lo que te quede a ti— responde Fanny.

a) Escriban las ecuaciones con las que se puede saber cuánto dinero tiene cada quien.
____

b) Escriban en su cuaderno el procedimiento para encontrar la solución.

c) Escriban un problema semejante al del inicio de la actividad 2 en el cual la solución se encuentre resolviendo el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 1\,200 = y - 1\,200 & (1) \\ 4(x - 1\,200) = y + 1\,200. & (2) \end{cases}$$
____

Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Luego contrástenlas con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 50 = y - 50$$

$$y + 50 = 2(x - 50)$$

¿El sistema de ecuaciones que plantearon para resolver el problema es parecido? ________ ¿Cómo resolvieron las ecuaciones? ¿Ambos equipos encontraron la misma solución? Si las soluciones que encontraron fueron diferentes vean cuál satisface las ecuaciones anteriores.

Problemas

En parejas, planteen las ecuaciones con que pueden resolverse los siguientes problemas.

1. Luis tiene en su cartera 31 billetes de \$50 y \$100 que, en total, suman \$2250. ¿Cuántos billetes de \$50 y cuántos de \$100 hay en la cartera? ________
2. Francisco compró, entre gallinas y guajolotes, 20 animales para su granja. Por cada gallina pagó \$80 y por cada guajolote \$235.00; en total, gastó \$3 650. ¿Cuántas gallinas y cuántos guajolotes compró? ________
3. Mirna compró tres camisetas y tres pares de calcetines en una bonetería y pagó \$309. Al siguiente día regresó y compró cuatro camisetas y dos pares de calcetines (del mismo tipo que los del día anterior) y pagó \$336. ¿Cuánto cuesta cada artículo? ________
4. Raúl le comentó a un amigo:

   —Si ganara \$500 más de lo que gano, ganaría la mitad de lo que quiero ganar. Pero si ganara \$500 menos, ganaría la cuarta parte de lo que quiero ganar.

   ¿Cuánto gana Raúl y cuánto quiere ganar? ________

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Para cada problema indiquen las variables o incógnitas que utilizaron. Escriban en qué casos llegaron a ecuaciones de la siguiente forma:

$$x + y = A$$

$$ax + by = C$$

¿Cuáles fueron los valores de a y b, y de A y C en cada problema? ________

Problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas

Actividad 3. En equipo, resuelvan el siguiente problema.

Problema. Un terreno de forma triangular tiene un área de 42 m². Si la altura del triángulo excede en 5 m a su base, ¿cuáles son las dimensiones de la base y de la altura del triángulo?

a) Escriban las ecuaciones que resuelven el problema. ________

b) Relacionen las ecuaciones y escríbanlas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Encuentren la solución con la fórmula general o utilizando factorización.

c) Con el siguiente sistema de ecuaciones escriban un problema análogo al que se plantea en esta actividad:

$$\begin{cases} xy = 336 & (1) \\ y = x - 5 & (2) \end{cases}$$

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. ¿Ambos equipos obtuvieron la ecuación $x^2 + 5x - 84 = 0$? ¿Una de las soluciones de esta ecuación es la base o la altura del triángulo? ________ Justifiquen su respuesta. ________

Problemas

En parejas, resuelvan los problemas planteando el sistema de ecuaciones y encuentren la solución. Hagan los procedimientos en su cuaderno.

1. En un triángulo rectángulo un cateto mide 3 m más que el otro. Si el área del triángulo es igual a 135 m², ¿cuál es la longitud de cada cateto? ________
2. En un círculo el radio se incrementa en 4 unidades y entonces el área del nuevo círculo es 9 veces mayor que el área del original. ¿Cuál es el radio del círculo original? ________
3. Un terreno de forma rectangular tiene un perímetro de 64 m y un área de 252 m². ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? ________

Reúnanse con otra pareja. Comparen sus respuestas y, con base en el procedimiento que realizó cada pareja, respondan en su cuaderno las siguientes preguntas: ¿en todos los problemas fue necesario plantear una ecuación para encontrar la solución?, ¿qué tipo de ecuaciones plantearon?, ¿qué método utilizaron para resolver las ecuaciones? Por ejemplo, ¿cómo resolvieron la ecuación $x^2 + 3x - 135 = 0$? ¿A qué problema corresponde esta ecuación?

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. Francisco compra siete paquetes de café y paga cierta cantidad. Una semana después con la misma cantidad compra 10 paquetes de café con un descuento de \$18 en cada paquete.

   a) ¿Cuánto cuesta el paquete de café con descuento? ________ ¿Y sin descuento? ________

   b) ¿Cuánto pagó en cada ocasión? ________

2. Propón un problema que se resuelva con la siguiente ecuación y encuentra la solución:

$$13x = 18(x - 25)$$

3. Una empresa tiene 250 empleados; paga $300 por una jornada de ocho horas y $450 por una jornada de 10 horas. Si en un día la empresa pagó $90 000 en salarios, ¿cuántos empleados trabajaron la jornada de 10 horas y cuántos la jornada de ocho horas? ______

4. Escribe un problema que se resuelva con el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo.

$$\begin{cases} x + y = 50 & (1) \\ 600x + 700y = 33\,200 & (2) \end{cases}$$

5. Formula un sistema de ecuaciones similar al del punto 4 cuyas soluciones sean $x = 30$ y $y = 80$.

Redacta un problema que se resuelva con el sistema de ecuaciones que planteaste y resuélvelo.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. ¿Llegaron a un sistema de ecuaciones de la siguiente forma para el punto 3?

$$x + y = 250$$

$$300x + 450y = 90\,000$$

¿Cuál es el valor de la incógnita x y cuál el de la incógnita y? ______

6. Trabajen en equipo para resolver el siguiente problema.

Miguel compró unos sacos de frijol y pagó $2400. Si hubiera comprado tres sacos más por el mismo dinero, habría pagado por cada saco $40 menos.

a) ¿Cuántos sacos compró? ______

b) ¿A qué precio los compró? ______

c) Demuestren que la solución del problema se encuentra con la siguiente ecuación y expliquen por qué:

$$\frac{2400}{x} - 40 = \frac{2400}{x+3}$$

d) Reduzcan la ecuación anterior a una de segundo grado y resuélvanla.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Cada equipo lea y estudie la propuesta del problema del otro equipo. Al reducir la ecuación del problema encontraron que el número de sacos es 12. Con base en la respuesta determinen el costo de cada saco. Verifiquen que el número de sacos y el precio que hallaron satisfacen las relaciones del enunciado del problema.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Problemas de ecuaciones lineales | **Problemas de sistemas de ecuaciones lineales** | **Problemas de ecuaciones cuadráticas**

El alumno aprenderá a:

Analizar las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Calcular las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Lección 29 Secciones de cilindros y conos

Problema de investigación

De manera individual resuelve el siguiente problema.

- En la figura 29.1, se muestra un cono recto que es cortado por un plano perpendicular a su eje; el corte que resulta es un círculo y su centro está en el eje del cono. La distancia h que parte del plano del corte al vértice del cono es de 10 cm y el ángulo entre el eje y la generatriz es de 30°.

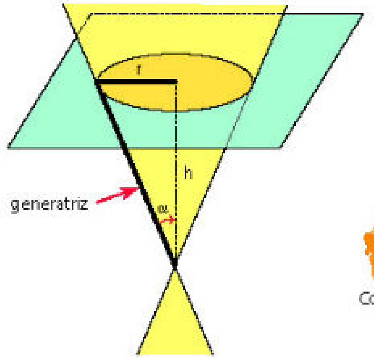


Figura 29.1
Cono recto

a) ¿Cuál es la longitud del radio? ______

b) ¿Cuál es la longitud de la generatriz que va del vértice a un punto de la circunferencia de intersección? ______

Explica a un compañero el procedimiento que realizaste para responder las preguntas.

La circunferencia y la elipse

En las actividades de esta lección se muestran dos tipos de figuras que resultan de hacer cortes a un cilindro y a un cono: el círculo y la elipse.

Actividad 1. En equipo, hagan lo que se pide. Necesitan dos vasos de cristal de forma cilíndrica, agua con algún colorante artificial o natural —por ejemplo, agua de jamaica— y un separador de huevos de plástico.

Problema. Viertan agua en ambos vasos hasta la mitad. Como se muestra en la figura 29.2, pongan un vaso sobre su base (vaso 1) y utilicen el separador de huevos de plástico para inclinar el otro aproximadamente 45° (vaso 2). Esperen hasta que el agua se estabilice. Observen que la superficie del agua es plana en ambos vasos.

Figura 29.2
Dos vasos con líquido

a) ¿Qué figura se forma en la superficie del vaso 1? ____________

b) ¿Qué figura se forma en la superficie del vaso 2? ____________

c) Si se corta un cilindro con un plano perpendicular a su eje, ¿qué figura se forma? ____________. Justifiquen su respuesta. ____________

d) Si se corta un cilindro con un plano que no es perpendicular ni paralelo a su eje, ¿qué figura se forma? ____________. Justifiquen su respuesta. ____________

La figura que se formó en el vaso 2 se llama *elipse*. Regresen a las preguntas de la actividad y escriban el nombre de la figura que se forma.

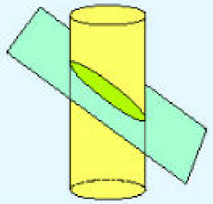
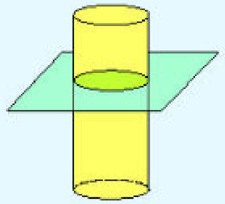
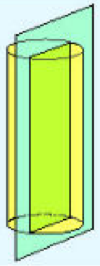
Cortes del cilindro por un plano

Actividad 2. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. En la tabla 29.1, se muestran tres cilindros, cada uno cortado por un plano diferente.

a) Escriban en la columna de la derecha la descripción para cada uno de los cilindros que se muestran.

Tabla 29.1 Tres cilindros cortados por diferentes planos

Cilindros cortados por planos diferentes	Descripción
	
	
	

b) Escriban el nombre de la figura resultante de cada una de las siguientes descripciones.

i) Corte con un plano paralelo al eje. ____________

ii) Corte con un plano perpendicular al eje. ____________

iii) Corte con un plano que no es paralelo ni perpendicular al eje. ____________

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Imaginen un cilindro de longitud infinita hacia sus dos extremos. ¿Habrá un plano que corte al cilindro en una figura diferente a un círculo, una elipse o dos rectas? ____________ Expliquen su respuesta. ____________

Cálculo de los ejes de una elipse que resulta de cortar un cilindro

Actividad 3. En equipos, hagan lo que se pide.

Problema 1. Las dimensiones de un cilindro están determinadas por su altura (h) y por el diámetro (d) del círculo base. Escriban en la figura 29.3 los símbolos d y h donde corresponden.

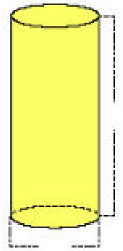


Figura 29.3
Cilindro

Problema 2. Las dimensiones de una elipse se determinan por su eje mayor (E) y su eje menor (e).

a) Escriban en la figura 29.4 los símbolos E y e donde correspondan.

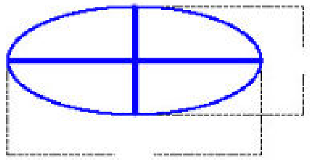


Figura 29.4
Elipse

b) Calculen el eje mayor de una elipse que resulta de cortar el cilindro con un plano que forma un ángulo de 36.4° con la base del cilindro. El diámetro del círculo base es de 10 cm. Para hacer el cálculo, básense en la figura 29.5 y utilicen una función trigonométrica.

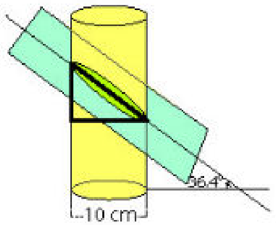


Figura 29.5
Un cilindro cortado por un plano para generar una elipse

Cortes en el cono por un plano

Actividad 4. En equipo, resuelvan los problemas que se plantean. Necesitan dos conos de papel y agua con colorante.

Problema 1. Viertan agua en ambos conos hasta la mitad. Sostengan uno (cono 1) en posición vertical e inclinen el otro (cono 2) aproximadamente 45°. Manténganlos así hasta que el agua se estabilice. Observen que la superficie del agua es plana en los dos conos.

a) ¿Qué figura se forma en la superficie del agua del cono 1? ____________

b) ¿Qué figura se forma en la superficie del agua del cono 2? ____________

c) Si un cono se corta con un plano perpendicular a su eje, ¿qué figura se forma? ______ ______ Expliquen su respuesta. ______

______

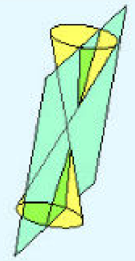
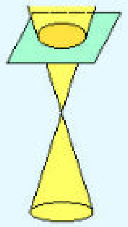
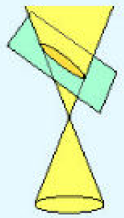
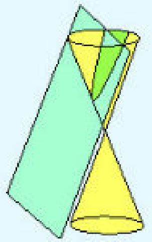
d) Si un cono se corta con un plano que no es perpendicular ni paralelo a su eje y tampoco es paralelo a una generatriz, ¿qué figura se forma? ______.

Expliquen su respuesta. ______

______

Problema 2. Cada uno de los cuatro conos de la tabla 29.2 está cortado por un plano diferente.

Tabla 29.2 Cuatro conos cortados por diferentes planos

Conos cortados por planos diferentes	Descripción
	
	
	
	

a) Elijan de la siguiente lista la descripción correcta para cada figura y escríbanla en la columna de la derecha de la tabla 29.2.

i) Corte con un plano paralelo al eje.

ii) Corte con un plano paralelo a una generatriz.

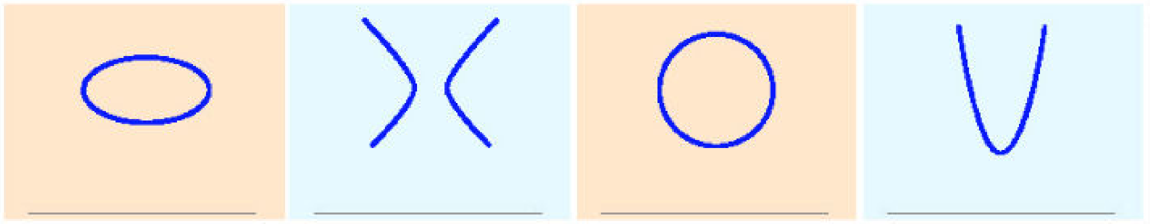
iii) Corte con un plano perpendicular al eje.

iv) Corte con un plano que no es paralelo ni perpendicular al eje, ni paralelo a una generatriz.

b) Hay cuatro clases de figuras llamadas secciones cónicas, o simplemente cónicas, que son: *circunferencia, elipse, parábola* e *hipérbola*. En la figura 29.6, se muestra un ejemplo de cada una de ellas. Escriban el nombre correspondiente en cada línea.

Figura 29.6

Secciones cónicas



c) Escriban cuatro enunciados que describan con qué corte se obtiene cada cónica. Observen el ejemplo.

i) Al cortar el cono con un plano perpendicular a su eje se obtiene una circunferencia.

ii) ______

iii) ______

iv) ______

Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Pónganse de acuerdo para contestar la siguiente pregunta: ¿Habrá un plano que corte al cilindro en una figura diferente a las mostradas en la figura 29.6? ______ Justifiquen su respuesta. ______

______

Cálculo del radio de un círculo que resultó de un corte hecho por el plano

Actividad 5. En parejas, resuelvan el siguiente problema.

Problema. En la figura 29.7, se muestra un cono recto cortado por un plano perpendicular a su eje.

a) Si la distancia h del vértice del cono al centro del círculo del corte es de 10 cm y el segmento de la generatriz d mide 11.5, ¿cuál es la longitud del radio?

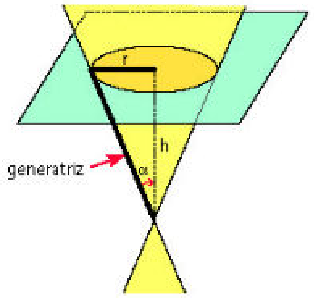


Figura 29.7

Cono recto

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten qué teorema sirve para encontrar la longitud del radio. ______________ ¿Por qué se puede aplicar ese teorema? ______________

Actividad 6. En equipos, lleven a cabo lo que se pide.

Problema. En el cono de la figura 29.8 la generatriz y el eje del cono forman un ángulo de 32.5°. Se hacen dos cortes: uno a 5 cm del vértice y otro a 10 cm.

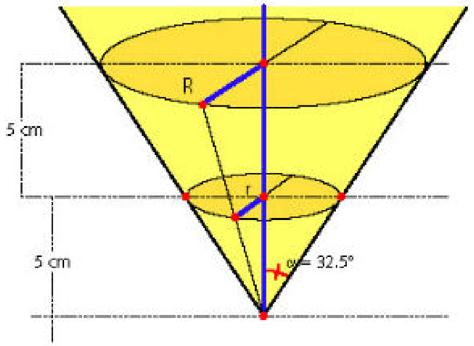


Figura 29.8
Cono recto

a) ¿Cuánto mide el radio de cada uno de los círculos de corte (denotados con r y R)?

b) Representen el problema de forma plana con dos triángulos rectángulos semejantes. Anoten en él los datos del problema e identifiquen las incógnitas (r y R).

c) Utilicen la función trigonométrica que relaciona el cateto opuesto y el cateto adyacente, para encontrar el radio de una de las circunferencias (por ejemplo, la menor). Para hacerlo elijan entre los siguientes valores el que sirve para resolver el problema.

i) sen(32.5°) = 0.8839 ii) cos(32.5°) = 0.4677 iii) tan(32.5°) = 1.8897

d) Encuentren el radio de la otra circunferencia utilizando semejanza.

e) Escriban la fórmula para encontrar el radio de un corte perpendicular al eje de un cono cuyo ángulo entre generatriz y eje sea α y que esté a una altura h del vértice.

Reúnanse con otros equipos y comparen los resultados obtenidos; lleguen a un acuerdo sobre cuál fórmula es la correcta.

Repasa lo aprendido

En parejas, resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.

1. Regresen al "Problema de investigación". Verifiquen tanto el procedimiento como su resultado. ¿Qué funciones trigonométricas se pueden utilizar para resolverlo? Justifiquen su respuesta.

2. Armen un cilindro de papel. Hagan un corte en el cilindro de aproximadamente 35° respecto a la base de manera que la parte truncada quede como se muestra en la figura 29.9.

   a) Escriban qué dificultades tuvieron para realizarlo.

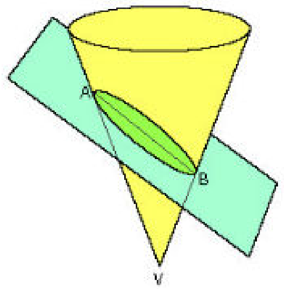
   b) Midan el diámetro del círculo base y el ángulo del plano de corte respecto a la base. Con estas dimensiones, calculen la longitud del eje mayor de la elipse formada en el corte.

   c) Ahora midan la longitud del eje mayor. ¿Esta medida es aproximada al resultado que obtuvieron en el inciso *b*?

Figura 29.9 Cilindro truncado

3. En la figura 29.10 se muestra un cono cortado por un plano de manera que una generatriz forma un ángulo de 90° con el eje mayor de la elipse que se formó. Si la distancia mínima del vértice a la elipse de corte es 3 m y la distancia máxima es 5 m, calculen la longitud del eje mayor de la elipse de corte.

Figura 29.10
Cono cortado por un plano



Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Comenten sobre la importancia del teorema de Pitágoras y de las funciones trigonométricas para calcular longitudes de segmentos asociados a cortes del cono con un plano. Formulen un problema relacionado con el corte de un plano en un cono (o en un cilindro) donde se utilice alguna de esas herramientas.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Elipse **Secciones del cilindro** **Secciones del cono**

El alumno aprenderá a: Construir fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Lección 30 El volumen de cilindros y conos

Problema de investigación

En parejas, resuelvan el siguiente problema.

- Determinar el volumen de un volcán es necesario, por ejemplo, para conocer su peligrosidad[1] o para hacer un levantamiento topográfico, que es un estudio útil para medir, observar, analizar suelos y otros procedimientos que permiten describir un terreno. Con lo anterior es posible elaborar mapas planos o con relieve. En las figuras 30.1 y 30.2 se muestran imágenes de dos volcanes mexicanos.

Figura 30.1 Volcán de Colima

Figura 30.2 Pico de Orizaba

a) ¿Cómo calcularían el volumen de uno de estos volcanes o de algún otro cuerpo con forma más o menos cónica? ______

b) ¿Qué datos requieren para calcular el volumen? ______

c) Describan el proceso que seguirían. ______

Actividad 1. En parejas, respondan lo siguiente.

Problema. Ya conocen la fórmula para calcular el volumen de cualquier prisma recto regular.

a) Uno de los cuerpos que han estudiado es el prisma hexagonal. Escriban la fórmula para calcular su volumen.

[1] Puedes encontrar más información al respecto en: http://www.volcanesdecanarias.com/index.php?option=com_content&view=article&id=70&Itemid=117&lang=es (Consulta: 21 de enero de 2017.)

b) Con base en esa fórmula, ¿cómo se obtiene la fórmula de la pirámide hexagonal cuando tienen la misma altura? ______

c) Escriban la fórmula de una pirámide hexagonal.

d) Con base en los incisos anteriores, escriban una fórmula para calcular el volumen del cilindro y otra para calcular el volumen del cono.

Volumen de un cilindro =

Volumen de un cono =

Regresen al "Problema de investigación" y comparen sus respuestas con las fórmulas que escribieron. Si el volcán Popocatépetl[2] tiene un diámetro en su base de 25 km y una altura de 5 492 m, ¿cuál es aproximadamente su volumen?

Actividad 2. Lleven a cabo la siguiente actividad en equipos. Necesitan una cartulina de cualquier color, un juego de geometría, cinta adhesiva o pegamento, tijeras y $\frac{1}{4}$ kg de arroz o alpiste.

Problema. Dibujen en la cartulina un círculo de radio igual a $\overline{BC} = 3$ cm y un sector de circunferencia con radio $\overline{BC} = 5$ cm tangente al primer círculo en el punto *B*, como se muestra en la figura 30.3. El ángulo que abarca el sector es el ángulo sombreado en la figura y mide 216°.

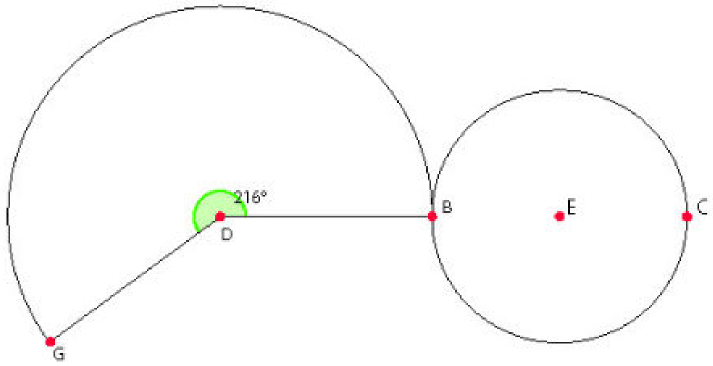


Figura 30.3 Un sector circular y un círculo

[2] Datos tomados de: http://www.elclima.com.mx/volcan_popocatepetl.htm (Consulta: 14 de junio de 2013.)

a) Corten ambas figuras y armen un cono pegando los bordes con la cinta adhesiva.

b) ¿Cuánto mide la altura del cono? ______

c) En una cartulina tracen el desarrollo plano de un cilindro que tenga bases iguales a la de este cono y la misma altura. Ármenlo.

Usando semillas comparen el volumen de ambos cuerpos geométricos. ¿Qué observan? Escriban sus conclusiones. ______

Problemas

De manera individual realiza lo que se solicita.

1. Consigue dos objetos cilíndricos y dos cónicos, por ejemplo, puede ser: un vaso de papel para tomar agua, un cono de helado, un gorro de fiesta, un tubo de cartón de un rollo de papel, un rollo de papel, una envase de leche en polvo, etcétera.

   a) Obtén los volúmenes de los objetos que conseguiste.

2. En una tolva como la que se muestra en la figura 30.4 se guardan aproximadamente 1 000 m³ de grano. Si el cilindro tiene 2.5 veces más que la altura del cono y en total la altura de la tolva es de 10 m (sin considerar las patas que lo sostienen). ¿Qué radio debe tener la tolva para contener la cantidad de grano requerida?

Figura 30.4 Una tolva

Reúnete con otro compañero y realicen una estimación a simple vista de los volúmenes de los objetos que cada uno consiguió. ¿Cuál de los dos hizo sus estimaciones con mayor exactitud? ¿Por qué? ______

Elijan tres objetos para hacer que el resto del grupo estime los volúmenes y compárenlos con los resultados que obtuvieron.

Comparen las fórmulas del siguiente recuadro con las que escribieron en el inciso e de la actividad 1. ¿Coinciden sus fórmulas? En caso de no ser así, corríjanlas.

Volumen de un cilindro y de un cono

El **volumen de un cilindro** se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$V_{cilindro} = \text{Área de la base por la altura} = \pi r^2 h$$

El **volumen de un cono** se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$V_{cono} = \frac{\text{Área de la base por la altura}}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas.

1. En la figura 30.5, se muestra un cilindro hueco; el radio exterior mide 24 cm y el interior 16 cm. ¿Cuál es el volumen del cilindro hueco?

Figura 30.5 Cilindro hueco

2. Un tanque cilíndrico que contiene agua mide 2.30 m de radio y tiene una capacidad de 22 000 litros. ¿Cuál es la altura del tanque?

3. A una pieza cilíndrica de metal de 10 cm de diámetro por 10 cm de altura se le hace una perforación cónica en el centro de una de sus bases. El hueco tiene 4 cm de diámetro y una profundidad de 3 cm. ¿Qué porcentaje de metal perdió la pieza original cilíndrica?

4. La maceta de la figura 30.6 tiene un diámetro superior de 50 cm y 65 cm de altura. Propón un método con el que pueda calcularse aproximadamente cuántos centímetros cúbicos de tierra se necesitan para llenar totalmente esta maceta. Usa tu método y escribe la solución.

Figura 30.6 Una maceta

En equipos, comparen sus respuestas. Cuando no estén de acuerdo expliquen a sus compañeros su razonamiento e intenten llegar a un acuerdo. Elijan, entre sus procedimientos de resolución, el que consideren más claro o exacto y preparen una exposición para presentar al resto del grupo.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Cónico **Cilíndrico** **Desarrollo plano**

Lección 31 Estimación de volúmenes de cilindros y conos

El alumno aprenderá a:

Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Problema de investigación

De manera individual resuelve el siguiente problema.

- Dibuja dos conos con las siguientes características: ambos tienen la misma altura; el radio de la base del primero mide 3 cm, mientras que el radio de la base del segundo es de 6 cm.

a) Con base en tus dibujos, escribe una V si la proposición es verdadera y una F si es falsa.

i) El volumen del primer cono es la mitad del volumen del segundo cono. ______

ii) El volumen del segundo cono es cuatro veces mayor que el volumen del primero. ______

iii) Faltan datos para decir cualquier cosa sobre el volumen de los conos. ______

Continúa con el trabajo de la lección, después regresarás a revisar lo que escribiste.

Actividad 1. En equipo, resuelvan lo que se pide.

Problema 1. El agua de una botella de 1.5 ℓ se va a repartir en vasos cónicos de 5 cm de diámetro por 7 cm de altura. ¿Cuántos vasos pueden llenarse? ______

Problema 2. Una pipa contiene aproximadamente 80 m^3 de agua y se vaciará en tambos cilíndricos de 1 m de diámetro y de 1.20 m de altura. ¿Aproximadamente cuánto tambos se necesitan? ______

Reúnanse con otro equipo y comparen el procedimiento que siguieron para hacer los cálculos anteriores. Escriban las semejanzas y las diferencias que observaron. ______

Actividad 2. En parejas, hagan lo que se pide. Requieren plastilina, una espátula y una regla graduada.

Problema 1. Modelen un cono con la plastilina. Hagan un corte paralelo a la base del cono con la espátula.

a) Describan lo que obtuvieron. ______________________

b) La parte del cono que quedó sin punta al cortarse es un cono truncado y se llama frustum del cono, porque el frustum es una porción de un cuerpo geométrico.

i) ¿Cómo obtendrías el volumen del frustum? ______________________

ii) Escriban el procedimiento. ¿Obtendrán una solución exacta o aproximada?

Problema 2. Modelen un cilindro con la plastilina, llámenlo *A*. Midan aproximadamente su radio y su altura. Construyan otro cilindro con el mismo radio, pero con la mitad de la altura, denomínenlo *B*. Luego hagan otro con la misma altura, pero con la mitad del radio, llámenlo *C*.

a) Dibujen los cilindros que obtuvieron en el siguiente recuadro:

b) Con base en los tres cilindros y sin hacer operaciones, escriban una *V* si el enunciado es verdadero y una *F* si es falso.

i) Los cilindros *B* y *C* tienen el mismo volumen. ____________

ii) El cilindro *B* tiene un volumen mayor que *C*. ____________

iii) El cilindro *B* tiene un volumen menor que *C*. ____________

iv) El cilindro *A* tiene el doble de volumen que *B*. ____________

v) El cilindro *A* tiene el doble de volumen que *C*. ____________

c) Realicen las operaciones para encontrar el volumen de cada cilindro y revisen sus respuestas al inciso *b*.

d) Escriban sus conclusiones.

Problemas

De manera individual escribe en tu cuaderno el procedimiento de cada uno de los siguientes problemas.

1. Si el radio de la base de un cono mide 2.3 m y su volumen es de alrededor de 141.3 m³, ¿cuánto mide aproximadamente su altura? ____________
2. Un poste de luz con forma de cilindro mide 6.4 m de altura y tiene un volumen aproximado de 4 m³. ¿Cuánto mide el radio de su base? ____________
3. Un tinaco de forma cilíndrica tiene una altura de 2.5 m y 1 m de radio. Se necesita hacer otro tinaco con la mitad de su altura, pero el mismo volumen. ¿Cuál debe ser el radio del segundo tinaco? Contesta sin hacer operaciones. ____________

Reúnete con un compañero y revisen tanto sus respuestas como los procedimientos a los problemas anteriores. En el problema 3 realicen las operaciones necesarias para encontrar el resultado más exacto posible. ¿Quién dio una mejor aproximación a la longitud del radio de la base del segundo tinaco? Explica a tu compañero cómo obtuviste la respuesta.

Actividad 3. En parejas, hagan lo que se pide.

Problema. Con base en las actividades anteriores, completen los enunciados siguientes. Si tienen dificultades con alguno, diseñen un ejemplo que explique lo que se afirma para que puedan completarlo.

a) Se tiene un cilindro y se fabrica otro con el mismo radio de la base, pero se duplica su altura. Se obtiene un cilindro con ____________ del volumen del primero.

b) Se tiene un cilindro y se fabrica otro con la misma altura, pero se duplica el radio de la base. Se obtiene un cilindro con ____________ del volumen del primero.

c) A partir de un cilindro dado, se puede obtener un cilindro de la quinta parte de volumen ____________

d) Se tiene un cono y se fabrica otro con el mismo radio de la base, pero se duplica su altura. Se obtiene un cono con ____________ del volumen del primero.

e) Se tiene un cono y se fabrica otro con la misma altura, pero se duplica el radio de la base. Se obtiene un cono con ____________ del volumen del primero.

f) A partir de un cono dado, se puede obtener un cono del triple de volumen ____________

Organicen una plenaria para revisar y corregir sus respuestas a los enunciados anteriores. Discutan en grupo si hay una sola manera de completar los enunciados. Diseñen al menos dos ejemplos de cada uno de los enunciados para sustentar su respuesta.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve cada uno de los problemas. Efectúa el procedimiento en tu cuaderno.

1. La altura de un cono es de 9 cm y el radio de su base es de 4 cm. Si el cono se corta paralelamente a la base, de modo que el frustum que se obtiene tiene 3 cm de altura, ¿qué porcentaje del volumen del cono está contenido en el frustum? Antes de hacer las operaciones responde: ¿el frustum contiene más, igual o menos de 30% del volumen del cono? Realiza las operaciones y revisa tu respuesta intuitiva.
2. Un reloj de arena está diseñado con un cilindro de cristal que contiene dos conos idénticos unidos por sus vértices, como se muestra en la figura 31.1.

Figura 31.1 Reloj de arena

   a) Explica cómo obtendrías el volumen del espacio libre que queda en el cilindro.
   b) Aplica el método que explicaste en el inciso *a*. Calcula el volumen del espacio libre que quede en el cilindro, si el radio de la base es de 6 cm y la altura de 18 cm.
3. Un tanque cilíndrico tiene una capacidad de 10 m^3 y un radio de 1.4 m. ¿Cuál es su altura?
4. Consigue un cono de papel y mide todas sus dimensiones. Si no consigues el cono puedes hacerlo con una hoja de papel.
   a) ¿Cuál es su capacidad? ____________
   b) Escribe las dimensiones de un cono de papel que tenga cuatro veces la capacidad que obtuviste ____________

En parejas, comparen su repuesta para el problema 4. ¿Las medidas de sus conos fueron iguales? ____________ ¿Por qué? ____________

Revisen las respuestas del "Problema de investigación". Si es necesario corrijan sus resultados.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Frustum **Reloj de arena** **Cono truncado**

El alumno aprenderá a: Analizar situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lección 32 Variación lineal o cuadrática

Problema de investigación

En equipos, resuelvan lo que se solicita.

- Se desea llenar con agua dos recipientes cilíndricos iguales cuya altura es de 50 cm. Al abrirse las llaves ($t = 0$), el recipiente A está vacío y el B tiene agua hasta una altura de 15 cm, como se muestra en la figura 32.1. El recipiente A recibe un flujo de agua que sube su nivel a una razón de 25 cm por cada 3 s, mientras que el recipiente B recibe agua de manera que aumenta su nivel 10 cm cada 3 s.

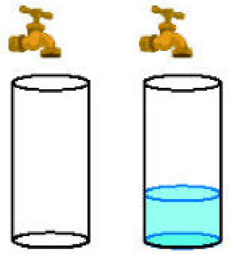


Figura 32.1 Dos recipientes

a) ¿En qué momento los dos recipientes tienen la misma cantidad de agua? ____________

b) ¿Cuánto tarda en llenarse cada recipiente?

Recipiente A: ____________ Recipiente B: ____________

c) Completen la tabla 32.1 con los valores de la altura del agua en cada uno de los primeros 10 segundos.

Tabla 32.1 Llenado de dos recipientes

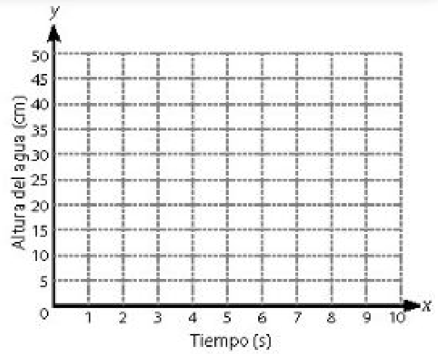
Segundo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura del agua (cm) del recipiente A.										
Altura del agua (cm) del recipiente B.										

d) Tracen la gráfica 32.1 con los valores de la altura del agua de cada recipiente respecto al tiempo.

e) Escriban la expresión algebraica de la altura (y) respecto al tiempo (x) para cada recipiente.

____

f) ¿La relación entre el tiempo y la altura de cada recipiente es proporcional? Expliquen su respuesta.



Gráfica 32.1

Reúnanse con otro equipo y comparen las tablas, gráficas y expresiones algebraicas que propusieron. Respondan: ¿En qué parte de las gráficas se observa la razón de llenado de cada recipiente?, ¿en qué parte de las expresiones algebraicas se observa la razón de llenado del recipiente?

Actividad 1. En parejas, lean la siguiente definición y utilícenla para resolver el problema.

Altura de un cuerpo

Para un cuerpo que se lanza hacia arriba desde el suelo con velocidad inicial v_0 en metros sobre segundo, la altura del cuerpo y, en metros, está dada por la fórmula: $y = v_0 x - \frac{1}{2} g x^2$, donde x, en segundos, es el tiempo a partir del momento del lanzamiento y $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$ es la aceleración constante debida a la gravedad.

Problema. Se lanzan dos proyectiles hacia arriba. El proyectil 1 desde una altura de 6 m y con velocidad inicial de $10\ \frac{m}{s}$. El proyectil 2 se lanza desde el suelo a una velocidad inicial de $15\ \frac{m}{s}$.

a) Escriban las ecuaciones para calcular la altura de cada uno.

Proyectil 1: ________________

Proyectil 2: ________________

b) ¿En qué instante ambos proyectiles alcanzan la misma altura? ________________

c) ¿Cuál es la altura a la que se encuentran ambos objetos en ese momento? ________________

d) ¿Cuántos segundos tarda cada proyectil en tocar nuevamente el suelo? ________________

e) Completen la tabla 32.2 con los valores de la altura que alcanza cada proyectil en los primeros 10 s.

Tabla 32.2 Lanzamiento de dos proyectiles

Segundo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura del proyectil 1 (m)										
Altura del proyectil 2 (m)										

f) Tracen en su cuaderno una gráfica que represente la altura que alcanza cada proyectil en función del tiempo.

Reúnanse con otra pareja y contrasten sus respuestas. Comparen las ecuaciones que obtuvieron con las siguientes:

$$y = -4.9x^2 + 10x + 6$$

$$y = -4.9x^2 + 15x$$

¿Obtuvieron las mismas ecuaciones? Si hay diferencias expliquen las razones. Con base en la gráfica, ¿dónde se indica que un proyectil alcanza al otro?

La longevidad de los árboles

Actividad 2. De manera individual responde lo que se pide.

Problema. Un problema que estudian los científicos es cómo determinar la edad de los árboles. El conocimiento de la edad biológica de un árbol ayuda a diseñar estrategias para la protección y cuidado de la especie a la que pertenece. Existen métodos muy diversos para estimar la edad de un árbol, unos son útiles para algunas especies, pero no para otras. Un método que se aplica a árboles que crecen en bosques con climas extremosos es el de contar los anillos que forman su tronco como se muestra en la figura 32.2. Para estas especies el número de anillos indica el número de años del ejemplar. La edad se puede calcular cuando el ejemplar se ha talado, sin embargo, muchas veces se debe estimar la edad de ejemplares que están vivos y que se quieren preservar. En este caso no se pueden contar los anillos, pero es posible medir su perímetro.

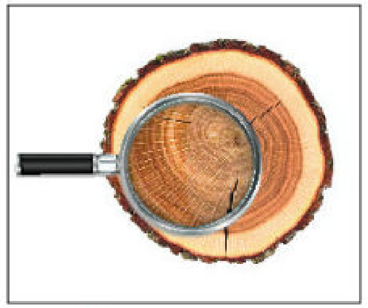


Figura 32.2 Aspecto de la cohorte de un árbol

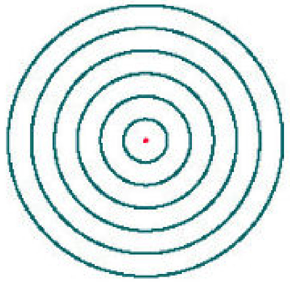


Figura 32.3 Modelo geométrico de la cohorte de un árbol

a) Con base en la hipótesis de que para una especie determinada cada capa representa un año de vida y el ancho promedio de cada capa es de 3 cm. Completen la tabla 32.3 con la circunferencia (C) de un árbol de esa especie en función de sus años de vida (x).

Tabla 32.3 Circunferencia de un árbol

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C										

b) Bosqueja en tu cuaderno una gráfica de la circunferencia de un árbol en función de los años que vive.

c) Escribe la ecuación algebraica de la función correspondiente. ________________

¿Es lineal? ________ ¿Por qué? ________________

d) Si la circunferencia de un ejemplar es igual a 240 cm, ¿cuál es su edad aproximada? ________

Formen equipos y comparen sus respuestas. Comenten acerca de la utilidad del modelo para calcular la longevidad de un árbol. Analicen qué información es necesaria tener sobre la especie de árboles para poder aplicar el método. Mencionen a otros equipos las razones por las que es importante calcular la edad de los árboles.

Oferta y demanda

Actividad 3. En equipos de tres alumnos hagan lo que se pide.

La ecuación de demanda es aquella que expresa la relación que existe entre C y x, donde C es la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio x. Es común que si los precios bajan, los consumidores estarán dispuestos a comprar más artículos, así la gráfica de la ecuación suele decrecer. Supongan que para el producto DVD del siguiente problema la ecuación de demanda es una ecuación lineal.

Problema. En una tienda de videos se venden 20 DVD si el precio de cada uno es de $25; en cambio, si el precio unitario fuera de $30 sólo se venderían 15.

a) Completen la tabla 32.4 calculando los valores de C para los precios que se indican.

Tabla 32.4 Cantidad de DVD comprados

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45
C					20	15			

b) Elaboren en su cuaderno la gráfica de esta ecuación de demanda.

c) Escriban la ecuación de demanda para estos DVD. ____________________

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. ¿Cómo varían las ventas (C) en función del precio (x)? ¿Refleja el modelo lo que saben acerca de la relación entre compradores de un producto y precio del producto?

Actividad 4. En parejas, realicen lo que se pide.

La ecuación de oferta es la relación entre el precio que puede tener un artículo (x) y la cantidad de artículos (O) que los proveedores o fabricantes estén dispuestos a colocar en el mercado a ese precio. Normalmente, si el precio es alto los proveedores colocarán muchos artículos en el mercado, sin embargo, si el precio es bajo disminuirán los artículos que ofrecen a los proveedores. Así, la curva de oferta suele ser creciente.

Problema. Mauricio es un fabricante que puede colocar en el mercado 400 unidades de un producto cuando el precio es de $200 y 250 unidades cuando el precio es de $150 (Supongan que la función de oferta es lineal respecto a la cantidad de artículos ofrecida.)

a) Completen la tabla 32.5.

Tabla 32.5 Cantidad de artículos de un fabricante

x	50	75	100	125	150	175	200	225	250
O					250		400		

b) Tracen en su cuaderno la gráfica de la ecuación de oferta.

c) Escriban la ecuación de oferta para el número de unidades de este producto. ____________________

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Respondan: ¿Cómo varía la oferta en función del precio? ¿Refleja el modelo lo que saben acerca de la relación entre la oferta de un producto y su precio?

Actividad 5. Sigan trabajando en parejas para llevar a cabo lo que se pide.

Si el precio de un artículo es demasiado alto habrá pocos consumidores dispuestos a comprarlo; a la inversa, si el precio es demasiado bajo los fabricantes no estarán dispuestos a ofrecerlo. En el mercado existe una tendencia que busca un equilibrio de los precios para que no se llegue a ningún extremo. El punto de equilibrio (C, O) del mercado es conocido como el precio (x) en que la cantidad demandada C es igual a la cantidad ofrecida O por los productores. Es decir, es un punto que satisface las ecuaciones de demanda y de oferta a la vez.

Problema. Consideren la ecuación de demanda de la actividad 3 y la siguiente ecuación de oferta.

a) Los fabricantes de DVD están dispuestos a vender a la tienda sólo 10 DVD si el precio es de $5 y 15 unidades cuando el precio sea de $10. Completen la tabla 32.6, donde x es el precio y O el número de DVD que los fabricantes están dispuestos a vender a ese precio (utilicen un modelo lineal).

Tabla 32.6 Cantidad de artículos vendidos

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45
O	10	15							

b) ¿Cuál es el punto de equilibrio? ____________________

c) Tracen en su cuaderno, en un mismo plano cartesiano, la gráfica de la ecuación de la demanda del problema de la actividad 3, y la gráfica de la ecuación de la oferta de la actividad 4.

d) Con base en la gráfica, ¿cuál es el punto de equilibrio? ____________________

e) Escriban las expresiones algebraicas de la ecuación de demanda y de oferta. ____________________

f) Con base en estas ecuaciones, ¿cómo se encuentra el punto de equilibrio? Encuéntrenlo mediante un proceso algebraico y verifiquen que coincida con el propuesto en los incisos anteriores.

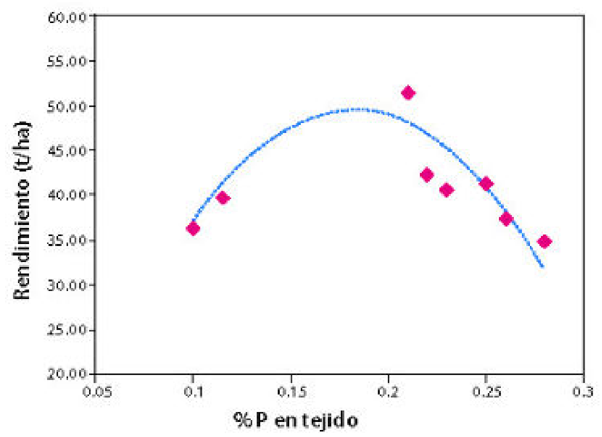
Comparen con otra pareja sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten sus propuestas. Analicen el significado del punto de equilibrio y el precio de los productos que se derivan de éste. Expliquen por qué el precio derivado del punto de equilibrio es el que por lo común tiene un producto en el mercado.

Uso de las TIC

En equipos, lleven a cabo lo que se pide.

1. Estudios sobre el rendimiento de vegetales (cantidad y calidad de la cosecha) en relación con los nutrientes que se les proporcionan (agua, abono, etcétera.) han propuesto modelos cuadráticos. A las gráficas de rendimiento se les llama *curvas de respuesta*. Por ejemplo, en la gráfica 32.2[1] se muestran las curvas de variación del fósforo en el tejido de la cebolla bulbo como parte de su balance nutricional respecto a otros nutrientes.

Variación del P en el tejido de la cebolla bulbo
Respuesta en rendimiento al balance nutricional con Mg, B, Zn y Mn



Gráfica 32.2

De la gráfica 32.2 se tiene que:

- Las curvas no empiezan de cero porque el ambiente contiene nutrientes naturales (tierra, luz, etcétera).
- Las curvas aumentan sólo hasta cierto punto y después el rendimiento baja.

a) La curva de rendimiento (Y) cuando se siembra la cebolla en función del porcentaje de fósforo (X) está dada por:

$$Y = -1\,830.9x^2 + 665.47x - 11.03$$

b) ¿Cuál es el rendimiento de la cebolla que se obtiene con una presencia de fósforo de 0.1%?

c) ¿Para qué porcentaje de fósforo se alcanza un máximo rendimiento?

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Expliquen al otro equipo qué hicieron para determinar la cantidad de nutrientes con los que se alcanza un máximo rendimiento.

[1] Gráfica adaptada de: http://www.scielo.org.co/pdf/agc/v25n2/v25n2a18.pdf (Consulta: 21 de enero de 2017.)

Repasa lo aprendido

En parejas, resuelvan en su cuaderno los problemas que se plantean.

1. Una especie de árbol crece formando anualmente en su tronco capas sucesivas de 2.8 cm de ancho. Si la circunferencia del tronco de un árbol de esa especie mide 140 cm, ¿cuál es su edad aproximada?

2. Lean y analicen las siguientes cuatro leyes económicas:

   a) Si la demanda aumenta y la oferta se mantiene fija, habrá escasez del producto o de los servicios. Esta situación conduce a un precio de equilibrio más alto porque los productores podrán subir el precio.

   b) Si disminuye la demanda y la oferta se mantiene sin cambios, habrá superávit del producto o de los servicios. Lo anterior lleva a un precio de equilibrio más bajo, ya que los productores deberán bajar los precios por la competencia.

   c) Si la demanda se mantiene sin cambios y la oferta aumenta, habrá superávit del producto o servicios. Dicha situación conduce a un precio de equilibrio más bajo, ya que los productores deberán bajar los precios por la competencia.

   d) Si la demanda se mantiene sin cambios y disminuye la oferta, habrá escasez del producto o de los servicios. Esto lleva a un precio de equilibrio más alto, porque los productores podrán subir el precio.

3. Si la curva de rendimiento (Y) de una siembra de vegetales en función de un nutriente (X) está dada por la ecuación:

$$Y = -\frac{1}{250}X^2 + \frac{1}{3}X + 90$$

   a) ¿Con qué cantidad de nutrientes se alcanza un máximo rendimiento?

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Especifiquen cómo hicieron las operaciones con la ecuación de la curva de rendimiento para encontrar la cantidad de nutrientes en que se alcanza el máximo rendimiento.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Longevidad de un árbol	**Ecuación de demanda**	**Ecuación de oferta**
Puntos de equilibrio entre la oferta y la demanda	**Nutrientes**	**Curvas de rendimiento**

El alumno aprenderá a:
Analizar las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Lección 33 Juegos justos

Problema de investigación

En parejas, analicen la situación que se plantea y respondan las preguntas.

- La familia Rosales está integrada por los esposos, Ana y Carlos, y su hijo Beto. Por lo general, los domingos después de comer ven televisión, pero como sólo tienen un televisor difícilmente se ponen de acuerdo en lo que van a ver. A Carlos le gustan los programas deportivos, Ana prefiere ver películas y Beto, caricaturas. Lo más práctico sería que se turnaran el control del televisor semanalmente, pero Beto les ha propuesto a sus padres algo más divertido: "¡Dejémoslo a la suerte!" Propone que el uso del control se decida lanzando dos volados con una moneda: si no cae ningún águila, gana Ana; si cae sólo un águila, gana Beto, y si caen dos águilas, gana Carlos.

  a) ¿Cuáles son los posibles resultados en los dos volados? ______

  ______

  b) ¿El juego que propone Beto es justo? ______ Expliquen su respuesta.

  ______

  ______

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Analicen qué se entiende por "juego justo". Lleguen a un acuerdo y vean si el juego es justo.

Actividad 1. En equipos de tres alumnos hagan lo que se pide.

Problema 1. Comenten y lleguen a un acuerdo sobre lo que significa *juego justo*.

a) Escriban su conclusión. ______

______

______

b) Éstas son las respuestas de cuatro alumnos a la pregunta: "¿Qué es un juego justo?" Léanlas y decidan cuál o cuáles son aceptables y por qué.

i) LUISA: Cuando los participantes están de acuerdo en jugarlo.

ii) MARIO: Cuando todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar (con resultados equiprobables).

iii) NATALIA: Cuando el promedio de ganancia de cada participante sea el mismo, si el juego se realiza un gran número de veces.

iv) ÓSCAR: Cuando el juego es de azar.

Problema 2. Alberto, Beatriz y Carlos colocan en dos urnas tres fichas numeradas del 1 al 3, como se muestra en la figura 33.1, y juegan de la siguiente forma: se saca al azar una ficha de cada urna, en total dos fichas, y se suman los números. Se tienen las siguientes condiciones, de acuerdo con el resultado:

- Alberto gana si el resultado es 2 o 5.
- Beatriz gana si el resultado es 3 o 6.
- Carlos gana si el resultado es 4.

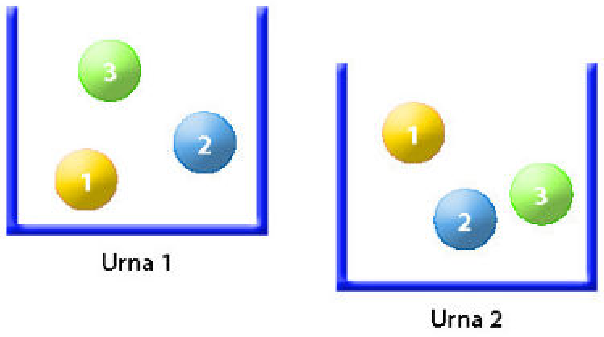


Figura 33.1
Dos urnas con fichas numeradas

a) Consideren los siguientes eventos: A: Alberto gana, B: Beatriz gana y C: Carlos gana. Calculen la probabilidad de cada evento.

i) P(A) = ______ ii) P(B) = ______ iii) P(C) = ______

b) ¿El juego es justo? ______ ¿Por qué? ______

______

Aclaren con otra pareja la definición de juego justo que utilizaron. Analicen si sus diferencias en las respuestas a las preguntas provienen de esa definición o de considerar distintos espacios muestrales. Si no se resuelven las diferencias, consulten a su maestro y organicen una discusión grupal para llegar a las respuestas correctas.

Problemas

Resuelve individualmente el siguiente problema. Haz los procedimientos en tu cuaderno.

Carmen y Daniel inventaron un juego con dados que tiene las siguientes reglas: lanzar dos dados y calcular la diferencia de puntos entre ambos resultados. Si la diferencia es de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana 1 ficha. Si la diferencia es de 3, 4 o 5, Daniel gana la ficha.

a) ¿El juego es justo? ______ ¿Por qué? ______

______

b) Si no fuera justo, ¿cómo lo modificarías para que se volviera un juego justo? ______

______

Juego de apuesta entre dos jugadores y ganancia esperada

El procedimiento para jugar apostando es que un jugador arriesga cierta cantidad de dinero esperando que ocurra un evento determinado. Si ocurre el evento, el jugador gana la cantidad apostada; en cambio, si no ocurre el evento, el jugador pierde su apuesta.

Actividad 2. En equipos, lean el problema que se formula y hagan lo que se pide.

Problema. Brisa juega apostando en el lanzamiento de un dado. Apuesta \$2 al evento A: "Sale el número 1".

a) Si no ocurre el evento A, Brisa pierde \$2. Si ocurre el evento A, Brisa gana \$2. ¿El juego es justo? ______ ¿Por qué? ______

b) Si el juego no es justo, ¿cómo se deben modificar las apuestas para que lo sea? ______

c) Si A es el evento: Brisa gana es igual a "Sale el número 1", A^c: Brisa no gana. En la tabla 33.1, se señala la probabilidad del evento A, $P(A) = \frac{1}{6}$ y el valor −2.00 representa la ganancia de Brisa (el signo "−" indica que es una pérdida). Completen la tabla 33.1 con el valor de la probabilidad de que Brisa pierda y con la cantidad que debe ganar Brisa si el evento A ocurre.

Tabla 33.1 Juego en el que apuesta Brisa

Evento	A	A^c
Probabilidad	$\frac{1}{6}$	
Ganancia		−2.00

d) ¿Los resultados A y A^c son eventos equiprobables? ______ ¿Por qué? ______

e) Lean la definición de ganancia esperada.

Ganancia esperada

La **ganancia esperada** de un jugador se define como la cantidad que gana por la probabilidad de ganar, menos la apuesta por la probabilidad de perder.

f) Calculen la ganancia esperada de Brisa. ¿Qué observan? ______

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten el significado del concepto de ganancia esperada. ¿Qué significa, en un juego, que la ganancia esperada sea un número negativo? Obtengan la ganancia esperada del juego del inciso *a*. Comenten que observan en el resultado.

Actividad 3. En parejas, lleven a cabo lo que se pide.

Problema 1. María y Esteban juegan a lanzar un dado. Cada uno apuesta cierta cantidad para reunir \$120. María gana la apuesta, si sale 1, 2, 3 o 4; Esteban gana, si se obtiene 5 o 6.

a) ¿Cuánto debe aportar cada uno a la apuesta para que el juego sea justo?

María: ______ Esteban: ______

Justifiquen su respuesta. ______

b) Consideren el juego sólo desde el punto de vista de María. Se indica con A el evento: "María gana" y con A^c: "María no gana". Completen la tabla 33.2.

Tabla 33.2 Juego de María

Evento	A	A^c
Probabilidad		
Ganancia		

c) Calculen la ganancia esperada de María. ______ ¿Qué significa este resultado? ______

d) Consideren ahora el juego sólo desde el punto de vista de Esteban. Indiquen con B el evento: "Esteban gana" y con B^c: "Esteban no gana". Completen la tabla 33.3.

Tabla 33.3 Juego de Esteban

Evento	B	B^c
Probabilidad		
Ganancia		

e) Calculen la ganancia esperada de Esteban. ______ ¿Qué significa este resultado? ______

Problema 2. Comenten y lleguen a un acuerdo sobre la definición de juego justo en un juego de apuestas entre dos personas donde el evento ganador no tiene la misma probabilidad que el evento perdedor.

a) Las siguientes son las respuestas de tres alumnos a la pregunta: "¿Qué es un juego justo?" Léanlas y decidan cuál o cuáles son aceptables y por qué.

i) Luisa: Cuando los participantes conocen la probabilidad de ganar y de perder, y así aceptan jugarlo.

ii) Mario: Para un jugador, el juego es justo cuando la ganancia esperada es cero.

iii) Natalia: Cuando lo que apuesta un jugador lo gana el otro y viceversa.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Analicen lo que es para ustedes un juego justo. Lleguen a un acuerdo y revisen si el juego de esta actividad es justo.

Problemas

En parejas, resuelvan el siguiente problema, lleven a cabo los procedimientos en su cuaderno.

Carmen y Daniel inventaron un juego de dados que consiste en lanzar dos dados. Luego calculan la diferencia de puntos entre ambos resultados. Si la diferencia es de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana 1 ficha. Si la diferencia es de 3, 4 o 5, Daniel gana la ficha.

a) Consideren el evento C: "Carmen gana" y calculen P(C) = ______

b) Consideren el evento D: "Carmen no gana" —que es igual a "Daniel gana"— y calculen P(D) = ______

c) Con base en lo que obtuvieron, ¿el juego es justo? ______ ¿Por qué? ______

d) ¿Cuál es la ganancia esperada de Carmen? ______

Juego de apuesta entre más de dos jugadores y ganancia esperada

Actividad 5. En equipos, hagan lo que se pide.

Problema. Carlos juega con cinco compañeros un juego de dados que consiste en que cada quien elige un número del 1 al 6. Cada uno apuesta \$1, de manera que se reúnen \$6. Se lanza el dado y el que haya elegido el número ganador se lleva los \$6.

a) En caso de que salga el número que Carlos eligió, ¿cuánto gana sin contar el peso que apostó? ______

b) En caso de que no salga el número que eligió, ¿cuánto pierde? ______

c) Completen la tabla 33.4 con los valores de la probabilidad y la ganancia de Carlos.

Tabla 33.4 Ganancia de Carlos

Evento	Sale el número que eligió	No sale el número que eligió
Probabilidad		
Ganancia		

d) Si se incluyen los seis jugadores en una sola tabla, ¿cuál de las siguientes representa la situación del juego desde el punto de vista de Carlos? ______

Tabla 33.5 Todos ponen \$1

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Ganancia	1	1	1	1	1	1

Tabla 33.6 Carlos gana \$5, y en caso de que gane otro pierde \$1

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Ganancia	5	–1	–1	–1	–1	–1

Tabla 33.7 Carlos gana \$1, y en caso de que gane otro pierde \$1

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Ganancia	1	–1	–1	–1	–1	–1

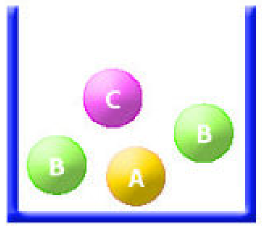
e) La ganancia esperada es la suma de los productos de las ganancias por su probabilidad. Encuentra la ganancia esperada de cada juego representado en las tablas de los incisos *c* y *d*. ¿Cuál de éstos es un juego justo? ______

Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Analicen el significado y la utilidad del concepto de ganancia esperada para identificar juegos justos.

Repasa lo aprendido

De manera individual resuelve los problemas que se plantean.

1. En una urna como la que se muestra en la figura 33.2 se colocan cuatro fichas: una con la letra A, otra con la C y las dos restantes con la letra B. Adriana, Bertha y Carolina juegan con las siguientes condiciones: si se saca una ficha al azar y sale la letra A, gana Adriana; Bertha gana, si sale la letra B, y Carolina gana si sale la letra C.



Urna

Figura 32.2 Urna con cuatro fichas

a) ¿El juego es justo? ________ ¿Por qué? ____________________

____

b) En caso de que se tenga que reunir una bolsa de $28, ¿cuánto tiene que aportar cada una a la bolsa para que el juego sea justo? Completa la tabla 33.8.

Tabla 33.8 Ganancia de Adriana

Evento	A	B	C
Probabilidad			
Ganancia			

c) Calculen la ganancia esperada de Adriana. ¿El resultado corresponde a un juego justo? Explica por qué.

____

Reúnanse con dos compañeros y contrasten sus respuestas. Comenten las modificaciones que se deben hacer a la tabla de ganancia de Adriana para obtener la tabla de ganancia de Bertha y luego la tabla de ganancia de Carolina.

2. Raúl compra un billete de lotería con el que sólo puede ganar un primer premio de $50 000 o un segundo premio de $20 000 con las probabilidades de 0.001 y 0.003, respectivamente. ¿Cuál es el precio justo que debe pagar por el billete? (Sugerencia: elabora una tabla de ganancia.)

3. Un jugador lanza un dado. Si sale un número primo, gana el número que indica el dado por $100, pero si no sale un número primo, pierde lo que indica el dado por $100 (recuerda que 1 no es primo). ¿Cuántas fichas debería ganar el jugador para que el juego sea justo?

Reúnanse con dos compañeros y comparen sus respuestas. Comenten la manera en que utilizaron lo aprendido en la lección para resolver los últimos dos problemas.

Glosario

Los conceptos que deben agregarse al glosario son:

Juego justo **Ganancia esperada** **Tabla de ganancia de un jugador**

Evaluación

Lee cada situación y elige la respuesta correcta.

Situación 1. Si el lado de un cuadrado disminuye en 1 m, entonces su área disminuye 39 m². Para poder conocer la longitud del lado del cuadrado original, considera que x es el lado del cuadrado original.

1. ¿Qué ecuación simplificada resuelve el problema?

a) $x^2 + 2x - 40 = 0$ b) $x^2 - x + 38 = 0$ c) $2x - 40 = 0$ d) $2x + 40 = 0$

2. La longitud del lado del cuadrado original es:

a) 19 m b) 20 m c) 21 m d) 22 m

Situación 2. A una cuadrilla de albañiles se le paga determinada cantidad por el trabajo realizado, la que se reparte en partes iguales. Si la cuadrilla tuviera dos albañiles más, cada uno recibiría $100 menos; si tuviera dos albañiles menos, cada uno recibiría $200 más. Se quiere saber el número de albañiles y la cantidad que recibió cada uno.

3. Si x es el número de albañiles y y la cantidad recibida, determina con qué sistema de ecuaciones se encuentra la solución.

a) $\begin{matrix} x + 2 = y - 100 \\ x - 2 = y + 200 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} -100x + 2y = 200 \\ 200x - 2y = 400 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 2x - 100y = 200 \\ 2x - 200y = 400 \end{matrix}$ d) Otra

4. Con base en el sistema de ecuaciones que elegiste, ¿cuál es la solución?

a) 3 albañiles y $200 b) 5 albañiles y $300 c) 6 albañiles y $400 d) Otra

Situación 3. El largo de un rectángulo mide 23 m más que su ancho. Si la diagonal mide 65 m.

5. ¿Cuál es la ecuación que modela cuánto miden el largo y el ancho del rectángulo?

a) $x^2 + 23x - 65 = 0$ b) $2x^2 + 46x - 3696 = 0$ c) $2x^2 + 46x - 4225 = 0$ d) Otra

6. ¿Cuánto miden el ancho y el largo del rectángulo?

a) 31 m y 58 m b) 32 m y 57 m c) 33 m y 56 m d) Otra

Situación 4. Imagina una escultura en forma de cono.

7. Si el radio de su base mide 2 m y su altura 5 m, ¿cuál es la medida más aproximada del volumen de la escultura?

a) 18 m³ b) 20 m³ c) 21 m³ d) 40 m³

8. Si el radio del cono se mantiene en 2 m y la altura aumenta 4 m (es decir, a 9 m), sin hacer operaciones, responde: ¿de qué orden aumenta la cantidad del volumen?

a) Unidades b) Decenas c) Centenas d) Unidades de millar

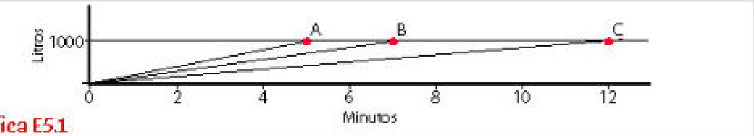
9. Haz el cálculo y comprueba tu resultado. Explica tu respuesta.

10. Si la altura fuera de 7 m y su volumen de 120 m³, ¿cuál de las siguientes cantidades sería la medida del radio más aproximada?

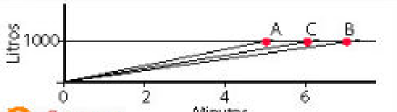
a) 3 m b) 4 m c) 5 m d) 6 m

Situación 5. Un recipiente tiene dos llaves que le suministran agua. Si la llave A llena el recipiente en 3 minutos y la llave B lo llena en 5 minutos, ¿cuánto tardan ambas llaves en llenar el recipiente? Llama C a la unión de las llaves A y B.

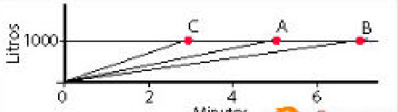
11. De las gráficas E5.1, E5.2 y E5.3, ¿cuál representa la velocidad de llenado de A, B y C?



Gráfica E5.1



Gráfica E5.2



Gráfica E5.3

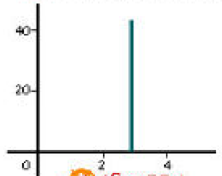
12. ¿Qué ecuación describe la cantidad de agua (y) que vierten el par de llaves en el recipiente por minuto (x)?

a) $35y - 12x = 0$ b) $12y - x = 0$ c) $6y - x = 0$ d) $3x + 5y = 1000$

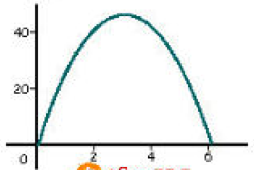
a b c d

Situación 6. Un balón se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 30 $\frac{m}{s}$. Se observa la altura que alcanza el balón respecto al tiempo.

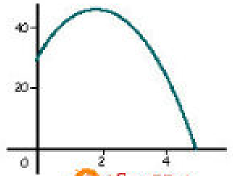
13. De las gráficas E5.4, E5.5 y E5.6, ¿cuál describe la situación?



Gráfica E5.4



Gráfica E5.5



Gráfica E5.6

14. ¿Qué ecuación describe la distancia del piso al objeto por cada segundo?

a) $y = -4.9x^2 + 18x + 30$ b) $y = -4.9x^2 + 30x$ c) $y = -4.9x^2 + 30$ d) Otra

a b c d

Situación 7. Una urna contiene seis bolas de color azul y blanco, pero se desconoce cuántas hay de cada color; además, las bolas están numeradas del uno al seis. Se extrae una bola al azar y se observa su número y color. Se tienen los eventos A: Sale una bola de color azul; B: Sale de color blanco; 1: Sale la bola numerada con uno; 2: Sale la bola numerada con dos, etcétera.

15. Si la $P(A) = \frac{1}{3}$, la probabilidad P(B) es:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

a b c d

16. Si el evento A y el evento "4" son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra el evento A o el evento "4" es:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

a b c d

17. Si el evento A y el evento C: Sale un número par son independientes, la probabilidad del evento "Sale una bola azul con un número par" es:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

a b c d

18. ¿Qué urna de la figura E5.1 cumple con las condiciones de los puntos 15, 16 y 17?

Figura E5.1

Anexo. Guía de uso de GeoGebra

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación. Su creador es Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo. Este software es útil para trabajar geometría y álgebra, y la conexión que hay entre ambos.

Forma de descargarlo

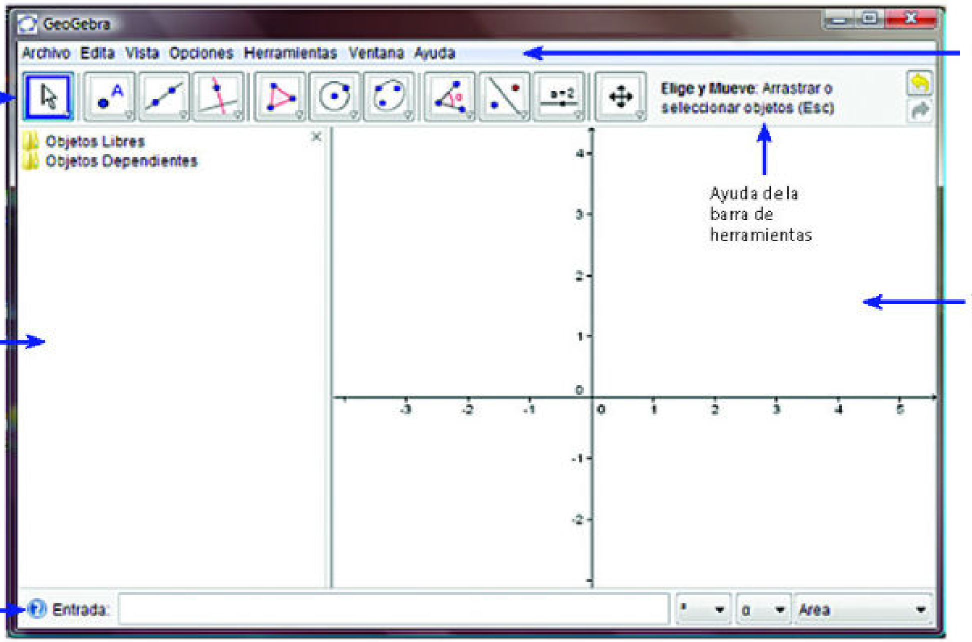
En un buscador de internet escribe la palabra GeoGebra. Se despliegan muchas opciones, elige la que diga: *GeoGebra descargar*, asegúrate de que sea la versión en español. Se muestran en la pantalla imágenes relacionadas con el *software*, entre las cuales una dice: *Descargar gratis*. Sigue un proceso interactivo en el que tienes que responder algunas preguntas, después haces dic en *continuar*, responde todas las veces que sea necesario hasta que queda cargado en la computadora. En la pantalla de ésta aparecerá el icono de la figura 1.

Figura 1 Icono de GeoGebra

Forma de activarlo y características generales

Se hace clic en el icono de GeoGebra y se abre una ventana en la pantalla como se muestra en la figura 2. En ella se han añadido los nombres de sus componentes generales.

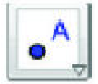
Figura 2 Ventana de GeoGebra



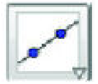
El *Menú* consta de 7 entradas. El *Archivo* sirve para crear, abrir, guardar y cerrar documentos. *Edita* ayuda a hacer y deshacer acciones, borrar y seleccionar. La *Vista* es para agregar o quitar las distintas vistas de la pantalla. Las *Opciones* permiten modificar opciones globales. Las *Herramientas* sirven para crear herramientas personalizadas. La *Ventana* ayuda a abrir nuevas ventanas y enlista las ventanas abiertas. La *Ayuda* es un instructivo de ayuda para aprender todo sobre el funcionamiento del programa.

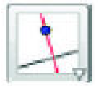
La *Barra de Herramientas* está formada por 11 ventanas, cada una de ellas consiste en una *caja de herramientas*. Un *clic* sobre la flechita del extremo inferior del recuadro despliega una lista con varias herramientas de las cuales se puede elegir una dentro de un conjunto de herramientas similares.

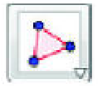

Elige y mueve, rota en torno a un punto, registra cambios en la hoja de cálculo.

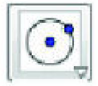


Nuevo punto, intersección de dos objetos, punto medio o centro.


Recta que pasa por dos puntos, segmento entre dos puntos, segmento dados puntos extremos y longitud, entre otros.

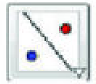

Recta perpendicular, recta paralela, mediatriz, entre otros.

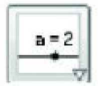

Polígono, polígono regular.


Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos, circunferencia dado su centro y radio, compás, entre otros.

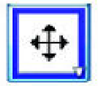

Elipse, hipérbola, parábola, cónica dados cinco de sus puntos.


Ángulo, ángulo dada su amplitud, distancia o longitud, entre otros.


Refleja objetos en recta, refleja objeto por punto, refleja punto en circunferencia, entre otros.



Deslizador, casilla de control para ocultar objetos, inserta texto, entre otros.


Desplazar vista gráfica, zoom de acercamiento, zoom de alejamiento, entre otros.

La *Ayuda de la barra de herramientas* indica la herramienta que está activada. Como se ve en la figura 2 (página 251), cada ventana de la *Barra de herramientas* contiene varias herramientas, una de ellas se activa de manera predeterminada y la ayuda de herramienta la indica; si se cambia, la ayuda también se actualiza.

La *Vista Gráfica* expone visualmente la representación de objetos matemáticos (como puntos, vectores, segmentos, polígonos, funciones, curvas, rectas y secciones cónicas). Cuando el ratón (o *mouse*) se desplaza sobre un objeto, éste se ilumina y se despliega un letrero rodante con su descripción.

La *Vista Algebraica* muestra los objetos algebraicos que se han introducido o los que genera cuando se introducen objetos geométricos. Desde la *Barra de Entrada* se pueden introducir directamente expresiones algebraicas. Después de pulsar la tecla *Enter*, lo ingresado aparece en la *Vista Algebraica* y, automáticamente, su *representación* gráfica en la *Vista Gráfica*. Por ejemplo, al ingresar f(x) = x^2 aparece la función cuadrática en la *Vista Algebraica* y el gráfico de la parábola en la *Vista Gráfica*.

Barra de entrada. Es para introducir objetos y para llamar comandos de manera rápida. Al ir anotando el nombre de un comando GeoGebra intenta completarlo automáticamente para facilitar la tarea.

Ejemplo: Trazar un triángulo cualquiera y sus alturas.

1. Se activa la herramienta *Polígono* de la quinta ventana de herramientas.

2. Se coloca el cursor en un punto del plano y se hace clic para obtener el vértice A, se desliza hacia otro sitio y se hace clic para obtener el punto B, se vuelve a deslizar para ubicar en otro sitio el punto C, finalmente se lleva el cursor al punto A inicial, se hace clic y se forma el triángulo. Observa la figura 3.

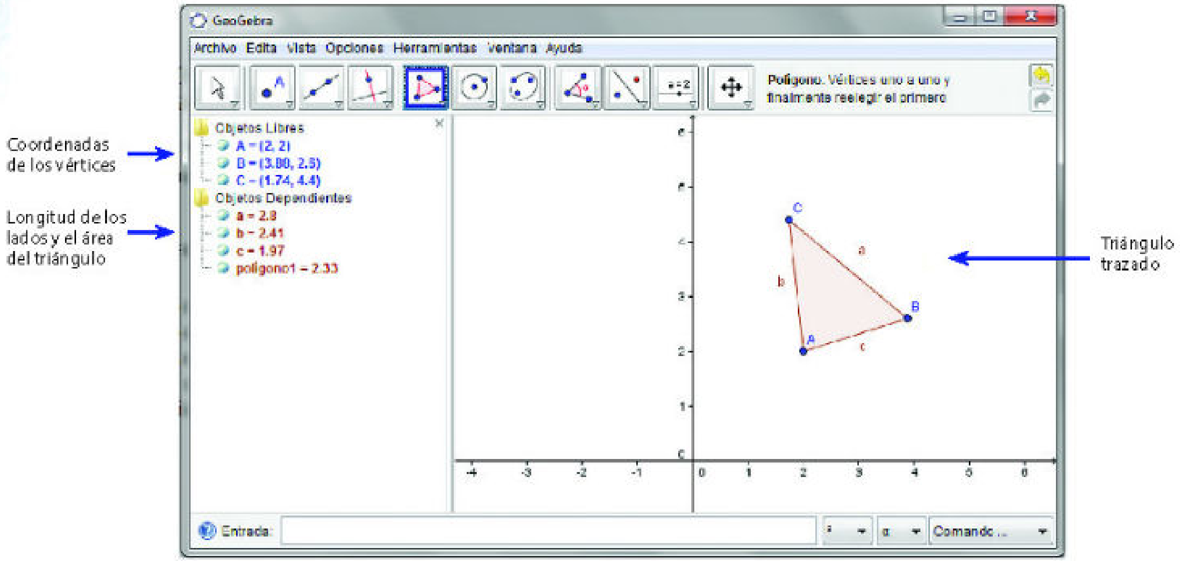


Figura 3 Trazo de un triángulo

Conclusión

Con los elementos resumidos podrás carga el *software*, iniciar una sesión y explorar sus posibilidades. La exploración y la experimentación son lo mejor para entender el funcionamiento del programa y apreciar sus posibilidades. Un apoyo muy grande es el comando *Ayuda*, el cual te orientará y aclarará tus dudas. ¡Anímate a explorarlo!

Bibliografía

Consultada

- Alsina Catalá, Claudi, Josep Maria Fortuny Aymemí y Rafael Gómez Pérez, *¿Por qué geometría?*, Madrid, Síntesis, 1999.
- ________________, *Invitación a la didáctica de la geometría*, Madrid, Síntesis, 1999.
- Cedillo, Tenoch, "Sentido numérico e iniciación al álgebra", en *La calculadora en el salón de clase*, vols. 1-3, México, Iberoamérica, 1998.
- Llinares Ciscar, Salvador y María V. Sánchez, *Fracciones*, Madrid, Síntesis, 1999.
- Mochón Cohén, Simón, Teresa Rojano y Sonia Ursini, *Modelación. Matemáticas del cambio*, México, Secretaría de Educación Pública-EMAT, 2000.
- Olmo Romero del, María Ángeles, María Francisca Moreno Carretero y Francisco Gil Cuadra, *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*, Madrid, Síntesis, 1989.
- Rojano, Teresa y Sonia Ursini, *Álgebra con hojas electrónicas de cálculo*, México, Iberoamérica, 1998.

Para el profesor

- Batanero, Carmen, *Didáctica de la estadística*, España, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2001, disponible en http://dv.fosjc.unesp.br/ivan/downloads/Aulas%20em%20PDF*Didactica_Estadistica.pdf (Consulta: 22 de enero de 2017.)
- Chamorro, María del Carmen, coord., *Didáctica de las matemáticas para primaria*, Madrid, Pearson Educación, 2003.
- Díaz Godino, Juan, *Didáctica de las matemáticas para maestros*, España, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2002, disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf (Consulta: 21 de enero de 2017.)
- Pólya, George, *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 1989.
- Sánchez Sánchez, Ernesto, coord., *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, México, Secretaría de Educación Pública, 2011 (Teoría y Práctica Curricular de la Educación Básica).

Para el alumno

- Camous, Henri, *Problemas y juegos con la matemática*, Barcelona, Gedisa, 1995.
- Díaz Godino, Juan, María del Carmen Batanero y María Jesús Cañizares, *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis, 1987.
- Blatner, David, *El encanto de pi*, México, Secretaría de Educación Pública-Aguilar, 2003 (Libros del Rincón).
- Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las formas*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).
- Holt, Michael, *Matemáticas recreativas*, 3 vols., México, Ediciones Martínez de la Roca, 1991.
- Marván, Luz María, *Andrea y las fracciones*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).
- Noreña, Francisco y Juan Tonda, *Los señores del cero: el conocimiento matemático en Mesoamérica*, México, Secretaría de Educación Pública-Pangea, 2003 (Libros del Rincón).
- Peña, José Antonio de la, *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).
- Perelman Yakov, Isidorovich, *Aritmética recreativa*, México, Ediciones de Cultura Popular, 1975.
- Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 2002.
- Wells, David, *El curioso mundo de las matemáticas*, Barcelona, Gedisa, 2000.

Sitios de internet

- Disfruta las matemáticas: http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) En esta página de internet se encuentran diferentes ejercicios de números, álgebra y geometría.
- Geometría dinámica: http://geometriadinamica.es/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Esta página de internet trata de geometría dinámica y matemáticas interactivas.

- Proyecto Descartes. Unidades didácticas.
  http://proyectodescartes.org/uudd/index.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) En esta página de internet se encuentran materiales didácticos, libros interactivos y diferentes materiales para el aula.
- Educamedia. Televisión educativa. http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/1/0 (Consulta: 21 de enero de 2017.) Esta página presenta una serie de videos cuyas actividades enfatizan el aprendizaje matemático de manera práctica.

Materiales y manuales que se pueden descargar en línea

- Documento de ayuda de GeoGebra: http://www.geogebra.org/help/docues.pdf (Consulta: 21 de enero de 2017.) Es una guía para el manejo del software GeoGebra.
- Proyecto LITE
  http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.4_RepositorioLITE/sistema/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página que provee recursos digitales educativos de fácil acceso, especialmente de matemáticas, para profesores y alumnos.

Obras de estadística

- Aguayo, Sergio, *El Almanaque Mexicano*, México, Aguilar, 2007.
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía, *Cuadernos de Información Oportuna*, México, agosto de 1999, núm. 317.

Para el glosario

- *Diccionario visual de matemáticas*, disponible en http://www.rpdp.net/mathdictionary/spanish/vmd/system/grd-k12-index.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Se puede consultar la explicación con apoyo visual, de términos matemáticos. Se presentan en orden alfabético.
- *Enciclopedia de todas las palabras matemáticas*, disponible en http://www.allmathwords.org/es/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Esta página de internet es un servicio que incorpora las ayudas disponibles en computadoras, incluye términos de uso común y ejemplos de su uso en los recursos digitales.
- *Enciclopedia temática*. Consejo Nacional de Educación para la Vida y el Trabajo. http://www.conevyt.org.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=494&Itemid=968 (Consulta: 21 de enero de 2017.) En esta página de internet, en los temas disponibles de Educación, puedes encontrar información sobre números, operaciones básicas, probabilidad, información, gráficas y geometría.
- Larousse, *Diccionario esencial de matemáticas*, México, Larousse, 2006.
- Portal educativo. Conectando neuronas. http://www.portaleducativo.net/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) En esta página de Internet, en el apartado Básica-Octavo-Matemática, puedes consultar información y explicaciones de los contenidos de la asignatura de matemáticas para secundaria.

Créditos iconográficos